LÖSUNGEN BEI REAKTIONS-DIFFUSIONS-MODELLEN FÜR DEN TRÄGERVERMITTELTEN ERLEICHTERTEN TRANSPORT DURCH BIOLOGISCHE MEMBRANEN

Dissertation

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Witta Ebel
aus Hamburg

Tübingen 1983

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543907_0019

LÖSUNGEN BEI REAKTIONS-DIFFUSIONS-MODELLEN FÜR DEN TRÄGERVERMITTELTEN ERLEICHTERTEN TRANSPORT DURCH BIOLOGISCHE MEMBRANEN

Dissertation

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Witta Ebel
aus Hamburg

Tübingen 1983

Tag der mündlichen Qualifikation: 6.9.1983

Dekan: Prof. Dr. A. Schönhage

1. Berichterstatter: Prof. Dr. K.-P. Hadeler

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Kaul

INHALTSVERZEICHNIS

I. Transport durch biologische Membranen

I.1 Membranen 3
I.2 Biologischer Transport 6
I.3 Systeme mit chemischen Reaktionen und Transportvorgängen 14
I.4 Diffusion durch Membranen 21
I.5 Erleichterte Diffusion 29

II. Ein Diffusions-Reaktionsmodell für den erleichterten Transport durch Membranen

II.1 Einleitung 47
II.2 Lokale Existenz 54
II.3 Globale Existenz und Beschränktheit . 66
II.4 Existenz stationärer Lösungen 76
II.5 Approximation der stationären Lösung 95
II.6 Stabilität 108
II.7 Numerische Simulation 138

III. Verallgemeinerungen 148

III.1 Lokale Existenz 150
III.2 Globale Existenz und Beschränktheit 190
III.3 Existenz stationärer Lösungen 196

Literaturverzeichnis 217

I. Transport durch Biologische Membranen

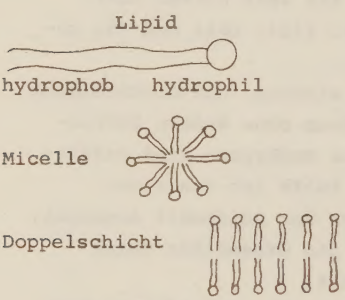
I.1 Membranen

Die biologischen Membranen gehören zu den Strukturen, die die molekulare Grundlage für den Bauplan sämtlicher Lebewesen der Erde bilden.
Die folgende Einführung in die Struktur und Funktion biologischer Membranen ist nur ein sehr kurzer Überblick; zur Ergänzung seien [68], [13], [61] und [8] genannt.
Für alle Lebensvorgänge ist es wichtig, daß biochemische Reaktionen in einem begrenzten Raum ohne äußere Störungen ablaufen können. Biologische Membranen sind Barrieren, die das ermöglichen. Jede Zelle ist von einer Zellmembran umgeben, die sie von der Außenwelt abgrenzt, und bei Eukaryoten werden auch die Organellen durch Membranen vom Zytoplasma getrennt.
Viele entscheidende Stoffwechselprozesse laufen an Membranen ab. Dazu gehören zum Beispiel der spezifische Transport durch molekulare Pumpen und Kanäle, Phagozytose und Pinozytose, Signalerkennung durch Rezeptoren für äußere Reize, Signalweiterleitung, Energiegewinnung durch Photosynthese und oxidative Phophorylierung.
Membranen bestehen hauptsächlich aus Lipiden und Proteinen, deren Verhältnis stark schwankt, etwa von 1:4 bis 4:1. Der Proteinanteil ist umso höher, je mehr und kompliziertere Funktionen die betreffende Membran zu erfüllen hat; zum Beispiel ist er in der inneren Mitochondrienmembran sehr hoch, während die Zellmembran der Myelinzellen zum größten Teil aus Lipiden besteht.
Membranlipide sind amphipolare Moleküle, das heißt sie haben ein hydrophiles und ein hydrophobes Ende. Der

UNIV. LEIDEN BIBL.

hydrophile "Kopf" kann ungeladen, ein- bis mehrfach geladen oder zwitterionisch sein. Der hydrophobe Teil besteht aus bis zu vier, meistens zwei Fettsäureketten mit je 14-24 Kohlenstoffatomen, meistens 16-18. Die Zusammensetzung der Lipide ist in den verschiedenen Organen sehr unterschiedlich und außerdem artspezifisch. In Eukaryoten enthalten Zellmembranen häufig einen großen Anteil Cholesterin.

In wäßriger Lösung bilden Lipide spontan Micellen und Doppelschichten, wobei die letzteren bevorzugt sind. In beiden Fällen kommt es zu einer Trennung von wäßriger und lipophiler Phase, die energetisch günstig ist. Daher können Doppelschichten eine große Ausdehnung erreichen, neigen dazu, sich zu schließen und haben die Fähigkeit zur Selbstreparatur. Lipid-Doppelschichten lassen sich künstlich herstellen. Man nennt sie "schwarze Lipidmembranen" und benutzt sie häufig als ein experimentelles Modellsystem für biologische Membranen.



Lipidmembranen sind nur im Kalten starr. Bei teilweise sehr unterschiedlichen Temperaturen (z.B. Phospholipidketten mit 14 C-Atomen: 21°C, bei 16 C-Atomen: 41°C) findet ein Phasenübergang statt, der bei homogenen Lipidmembranen auch scharf ist. Oberhalb der Übergangstemperatur hat die Membran den Charakter einer zweidimensionalen Flüssigkeit. Die laterale Beweglichkeit der Lipide ist dann sehr groß mit einer Diffusionskonstante von ca. 10^{-8} cm^2/sec, dagegen kommt ein Austausch von

gegenüberliegenden Lipiden aus den beiden Schichten selten vor: pro Lipid etwa 2.10^{-5}/sec, an einer gegebenen Stelle gibt es also nur einmal in vierzehn Stunden einen "flip-flop". Die Phasenübergangstemperatur hängt von der Zusammensetzung der Fettsäuren ab; sie nimmt mit der Länge der Ketten zu und mit der Anzahl der cis-Doppelbindungen ab.

Da eine Lipidmembran im Innern hydrophob ist, ist sie vor allem für polare Moleküle eine Permeabilitätsschranke. Nur einige kleine neutrale Moleküle, z. B. Wasser und Sauerstoff, können sie gut passieren. In der Nähe des Phasenübergangs ist die Permeabilität generell erhöht. Wenn feste und flüssige Phase koexistieren, entstehen offenbar Lücken, durch die andere Moleküle hindurchdiffundieren können.

Eine biologische Membran enthält zusätzlich zu den Lipiden viele Proteine. Periphere Proteine sind außen an die Doppelschicht angelagert und lassen sich relativ leicht entfernen, während integrale Proteine in eine oder beide Lipidschichten eingebettet sind.

periphere integrale Proteine

Ihre Verteilung auf die beiden Seiten der Membran ist nie symmetrisch; dies gilt im übrigen auch für die Lipide.

Man kann den Komplex aus Lipiden und Proteinen als eine zweidimensionale Lösung ansehen. Die Beweglichkeit der Proteine in Richtung der Membranoberfläche ist groß (Diffusionskonstante 10^{-9} - 10^{-12} cm^2/sec), transversale Bewegungen sind langsam.

Proteine verändern die Permeabilität der Membran. Viele erhöhen sie unspezifisch, was auf Störungen der Doppelschicht oder Löcher zwischen den Untereinheiten des Proteins zurückgeführt werden kann. Andere Proteine

binden spezifisch eine Substanz, die dann die Membran passieren kann.
Viele Membranproteine katalysieren Stoffwechselprozesse. Die Membran fixiert einerseits den Ort der Reaktion, andererseits dient sie häufig als Lösungsmittel. Einige Enzyme brauchen die hydrophobe Umgebung, um ihre aktive Konformation annehmen zu können. Dabei läßt sich häufig sogar eine Vorliebe für eine ganz bestimmte Lipidumgebung beobachten. Auch auf die Wirksamkeit hat die Zusammensetzung der Membran Einfluß. Oberhalb des Phasenübergangs beobachtet man generell eine stärkere Erniedrigung der Aktivierungsenergie bei Reaktionen, die durch membrangebundene Enzyme katalysiert werden.

I.2 Biologischer Transport

Biologische Membranen schirmen Zellen und Organellen wirksam von der "Außenwelt" ab, doch müssen sie den lebensnotwendigen Stoffaustausch zulassen. So sind Zellen beispielsweise auf die Zufuhr von Mineralien und teilweise auf Aminosäuren und Kohlehydrate angewiesen, während sie andererseits Stoffwechselprodukte ausscheiden müssen. Passive Transportsysteme"erleichtern" den Transport, indem sie den Konzentrationsausgleich auf beiden Seiten der Membran beschleunigen. Die äußeren Konzentrationen reichen jedoch häufig für eine Zelle nicht aus, daher gibt es auch aktive Systeme, die Substanzen anreichern können. Dazu wird Energie gebraucht. An Membranen, an denen Prozesse der Energiegewinnung ablaufen (an den inneren Membranen der Mitochondrien

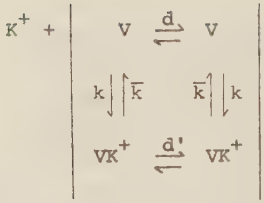
und Chloroplasten), werden zunächst durch aktiven Transport von Protonen oder Natrium-Ionen elektrische und osmotische Gradienten aufgebaut, bevor diese zur Speicherung chemischer Energie in Form von ATP genutzt werden. Aktiver Ionentransport führt zum Beispiel auch zum Aufbau des Potentials über die Nervenmembran, das die Voraussetzung für die Erregbarkeit und damit für die Übertragung des Signals ist.
Der ohmsche Widerstand einer Lipidmembran liegt im Bereich von 10^8 - 10^9 Ωcm^2. Das Innere einer Membran ist also für Ionen eine hohe Energiebarriere, die sie nur durch besondere Mechanismen in nennenswertem Ausmaß überwinden können. So erhöhen sich an der Nervenmembran im Laufe einer Erregung nacheinander die Natrium- und die Kaliumpermeabilität durch das Öffnen spezifischer Kanäle. In der postsynaptischen Membran entstehen unter dem Einfluß von Acetylcholin Poren, die sowohl Natrium als auch Kalium passieren lassen. An den Berührungsstellen benachbarter Zellen eines Gewebes gibt es ebenfalls Kanäle, die die beiden Zytoplasmata verbinden. Andererseits gibt es eine Reihe von Antibiotika, die einen passiven Transport von Ionen ermöglichen und so den Aufbau des Potential- oder pH-Gefälles über eine Membran verhindern; auf diese Weise hemmen sie z.B. die Nervenleitung oder die Synthese von ATP an der Mitochondrienmembran. Da man solche Antibiotika isolieren und gezielt in künstliche Lipidmembranen einbauen kann, sind sie einer Untersuchung besser zugänglich als die natürlichen Transportsysteme.
Einige dieser Antibiotika bilden Kanäle, die die ganze Membran überspannen. Dazu gehört Gramicidin A, ein Peptid aus 15 Aminosäuren. Ein Kanal besteht aus zwei der spiralförmigen Gramicidin-Moleküle, die einander in der Membran gegenüberliegen [6], [69]. Andere Substanzen

bilden erst aus höheren Polymeren Kanäle, z. B. Alamethicin aus sechs Einzelmolekülen. Die maximale Leitfähigkeit eines Gramicidin-Kanals (in KCl-Lösung) beträgt etwa 5.10^{-11} S, die Kapazität liegt bei 10^{7}-10^{8} Ionen pro Kanal und Sekunde, und die Diffusionskonstante $D = 10^{-6}$ cm^2/sec. Diese Leitfähigkeiten beobachtet man an Lipidmembranen, die nur geringe Konzentrationen von Porenbildnern enthalten. Man kann dann sprunghafte Veränderungen der Leitfähigkeit erkennen, die auf das Öffnen oder Schließen einzelner Kanäle zurückgeführt werden können [29]. Die mittlere Öffnungszeit eines einzelnen Kanals hängt von der Zusammensetzung der Membran ab; sie schwankt zwischen 0,4 und 60 Sekunden für Gramicidin A, bei Alamethicin-Poren liegt sie dagegen im Bereich von Millisekunden.

Unter den Modellen für den Transport durch solche Kanäle gehen einige von einem reinen Diffusionsprozeß aus, während andere das Innere einer Pore als eine Sequenz von Energieminima und -maxima beschreiben, die das Ion passieren muß. In den Modellen spielt ferner die "Größe" der Poren eine Rolle; damit ist nicht nur die Aufnahmekapazität gemeint, sondern es ist auch wichtig, ob die Moleküle sich aneinander vorbeibewegen können oder nicht.

Andere Antibiotika binden die Ionen auf der einen Seite der Membran und bewegen sich dann auf die andere, um dort ihr Substrat wieder abzuladen. Solche Moleküle werden als Träger oder Carrier bezeichnet. Zu dieser Klasse gehört z.B. Valinomycin, das aus organischen Säuren und Valin besteht, die abwechselnd durch Amid- und Esterbindungen miteinander verknüpft sind. Insgesamt zwölf Einheiten bilden einen Ring aus 36 Atomen, so daß die polaren Moleküle an der Innenseite liegen und die unpolaren Seitenketten nach außen zeigen. Der

innere Durchmesser des Ringes beträgt etwa 2,8 Å. Hier können Alkaliionen und andere kleine einwertige Kationen (z.B. NH_4^+) gebunden werden, wobei die Affinität für Kalium- und Rubidiumionen bei weitem am größten ist. Entsprechend beobachtet man, daß unter den biologisch relevanten Ionen Kalium am besten transportiert wird, etwa 10^4-mal besser als Natrium. In jedem Fall ist aber die Leitfähigkeit um einige Größenordnungen kleiner als bei Gramicidin A. Die Transportrate ist der Valinomycinkonzentration proportional; daher braucht dieses Molekül offenbar nur als Monomer vorzuliegen. Andererseits ist es nicht groß genug, um die ganze Membran zu überspannen, so daß der Schluß naheliegt, daß es sich tatsächlich um ein bewegliches "Carrier"-Molekül handelt [22]. Dafür spricht auch die starke Abhängigkeit von der Fluidität der Membran. Andere Autoren nehmen an, daß die Ionen auch zwischen zwei Valinomycin-Molekülen hin- und herspringen können [52]. Auf diese Weise umgehen sie die Schwierigkeit, daß Valinomycin auch zwischen dem polaren und dem unpolaren Teil der Membran diffundieren müßte, was nur unter einer Konformationsänderung möglich ist. Allerdings ist der Partitionskoeffizient von Valinomycin an einer Wasser/Öl-Grenzfläche 10^{-5} [42], was dagegen spricht, daß Valinomycin im äußeren Teil der Membran überhaupt zum Transport beitragen kann. Wenn man von dieser Komplikation absieht, so besteht eine plausible Modellvorstellung darin, daß das Ion an beiden Seiten der Membran (mit gleichen Reaktionsraten) reversibel an Valinomycin binden kann und daß Valinomycin in gebundenem und in ungebundenem Zustand in einem Schritt von der einen Seite auf die andere Seite der Membran diffundieren kann [65]. Dieses Modell wurde auch für viele andere Membrantransportprozesse vorgeschlagen.



Unter diesen Modellannahmen findet man im Experiment, daß die beiden Diffusionsraten d und d' gleich sind, nämlich 2.10^4/sec, also wesentlich kleiner als in den Kanälen.

Es gibt eine Reihe von Antibiotika, die ähnlich wie Valinomycin aufgebaut sind und analog wirken, so z.B. Enniatin, das einen etwa halb so großen Ring bildet, oder Monactin.

Einige organische Säuren transportieren Protonen über Lipidmembranen. Sie liegen in der unbeladenen Form als Anion vor, in der beladenen als neutrale Säure. Sie sind ebenfalls beweglich, und es werden ähnliche Modelle wie für Valinomycin vorgeschlagen [51]. Wenn sie in die innere Mitochondrienmembran eingebaut werden, verhindern sie den Aufbau eines pH-Gradienten und damit die Synthese von ATP aus ADP.

Auch für Anionen gibt es Carriermoleküle. So ist beispielsweise von Molekülen der Form R_3Sn^+ (R Kohlenwasserstoffkette) bekannt, daß sie Halogenionen über schwarze Lipidmembranen und über Erythrozytenmembranen transportieren. Durch radioaktive Markierung kann man feststellen, daß ein starker Austausch stattfindet, während der Nettofluß gering ist [78]. Dies liegt offenbar daran, daß die Ionen in der Membran viel unbeweglicher sind als der neutrale Komplex.

In biologischen Membranen sind für den Ionentransport Kanäle oder Poren anscheinend häufiger als bewegliche Carrier. In Bezug auf die Transportleistung beziehungsweise die Leitfähigkeit ist ihre Effektivität auch größer, allerdings sind sie weniger selektiv.

In der Axonmembran gibt es Kanäle für Natrium und für Kalium. Im Ruhezustand sind sie geschlossen. Nur während der Depolarisierung werden zuerst die Natrium-, dann die Kaliumkanäle geöffnet. Die Leitfähigkeit pro Kanal liegt in der Größenordnung von 3.10^{-12} S unter normalen Bedingungen, und die mittlere Öffnungszeit im Bereich von Sekunden. Über die molekulare Struktur der Kanäle weiß man wenig. Daß es sich nicht um einen Transport mit beweglichem Träger handelt,schließt man aus der hohen Leitfähigkeit und aus der Tatsache, daß es Substanzen gibt, die den Transport blockieren können, wenn sie auf einer Seite der Membran zugegeben werden, während sie auf der anderen Seite keine Wirkung haben [5]. Die einfachste mechanistische Vorstellung für die Wirkung dieser Kanäle ist die, daß die Ionen zunächst an einer Seite gebunden werden und dann einfach hindurchdiffundieren können. Dagegen spricht ein Experiment von Hodgkin und Keynes [31], in dem die unidirektionalen Kaliumflüsse gemessen wurden. Ihr Verhältnis ist

$$\frac{\overleftarrow{j}}{\overrightarrow{j}} = \left(\frac{[K^+]_{innen}}{[K^+]_{außen}}\right)^n \qquad \text{mit} \quad n = 2{,}5;$$

bei normaler Diffusion müßte n=1 sein. Nach der heutigen Vorstellung ist ein Kanal so eng, daß sich die Moleküle nicht aneinander vorbeibewegen können. Um dies adäquat beschreiben zu können, stellt man sich jede Pore als eine Folge von Bindungsstellen vor, die besetzt oder unbesetzt sein können [27]. Teilchen können dann auf benachbarte unbesetzte Stellen springen, aber nicht aneinander vorbei. Modelle dieser Form werden unter der Bezeichnung "Single-File-Diffusion" zusammengefaßt [24]. Das Ergebnis des Experiments von Hodgkin und Keynes kann dann erklärt werden, wenn sich auch mehrere Ionen gleichzeitig in eine Richtung bewegen können, wenn man also die Möglichkeit einer schnellen nicht lokalen

Wechselwirkung nicht ausschließt (die Modelle werden in Abschnitt 5 diskutiert).
Einen ähnlichen Effekt beobachtet man an den Kanälen der postsynaptischen Muskelmembran. Hier ist n=2. Diese Kanäle unterscheiden sich von denen des Axons durch geringere Selektivität. Sie transportieren sowohl Kalium- als auch Natriumionen. Sie werden unter dem Einfluß des Neurotransmitters Acetylcholin geöffnet. Unter Normalbedingungen ist die Leitfähigkeit pro Kanal $2{,}7.10^{-11}$ S [67].
Der größte von biologischen Membranen bekannte Kanal ist eine Verbindung zwischen benachbarten Zellen, die in den meisten Geweben nachgewiesen werden kann. Hydrophile Moleküle bis zu einer Größe von ca. 15 Å können durch diese Verbindungen transportiert werden. Strukturuntersuchungen zeigen, daß der Kanal aus einem Protein mit mehreren Untereinheiten besteht. Etwa eine Minute nach der Herstellung des Zellkontakts kann die erste Erhöhung der Leitfähigkeit festgestellt werden, die danach in Vielfachen einer Einheit ansteigt, um später in Sättigung überzugehen. Die Latenzzeit kann dadurch erklärt werden, daß die Untereinheiten erst an die Kontaktstelle diffundieren müssen, um den funktionsfähigen Kanal zu bilden. Die Kanäle sind dann außerordentlich stabil und bleiben mindestens für Minuten geöffnet [45].
Während kleine Ionen offenbar vorwiegend durch Kanäle über biologische Membranen transportiert werden und der zellverbindende Kanal kaum selektiv Moleküle bis zu einer bestimmten Größe passieren läßt, fällt es beim spezifischen Transport größerer organischer Moleküle schwerer, sich einen solchen Porenmechanismus vorzustellen. Deshalb werden hier meistens Carriermodelle ähnlich wie beim Valinomycin vorgeschlagen. Man nimmt zum Beispiel

an, daß durch bewegliche Trägermoleküle einige Aminosäuren [30] und Zucker [76],[19] transportiert werden. Die Ergebnisse der Experimente sind zwar kaum mit einfachen Modellvorstellungen in Einklang zu bringen, es gibt aber Hinweise darauf, daß beim Zuckertransport sowohl die Reaktionsraten auf beiden Seiten der Membran verschieden sind als auch möglicherweise die Transportraten über die Membran sich in den beiden Richtungen unterscheiden. Es besteht auch keine Einigkeit darüber, ob ein solches Carriermodell überhaupt angemessen ist. Es wurde auch ein Single-File-Porenmechanismus vorgeschlagen [49], aber dagegen spricht, daß Gegentransport und gelegentlich auch kompetitive Beschleunigung beobachtet wurde [79]. Zwar kann auch bei den Single-File-Diffusionsmodellen durch eine andere Substanz, die dieselben Poren benutzt, ein Fluß entgegen dem Konzentrationsgefälle induziert werden; doch ist dieser stets in Richtung des Fremdgefälles [25 II] und nicht diesem entgegen, wie es beobachtet wurde. Die kompetitive Beschleunigung ist gar nicht mit Porenmodellen in Einklang zu bringen. In [43] und [32] werden völlig andere Modelle vorgeschlagen.

Welche Relevanz die passiven Transportsysteme haben, ist nicht immer klar. Menschliche Erythrozyten haben ein passives Zuckertransportsystem, andere Säugetiere kommen ohne dieses aus. Zellen mit einem größeren Zuckerbedarf bevorzugen aktive Transportmechanismen, so reichert z.B. E.coli Lactose im Innern an [44]. Wenn die Synthese von ATP gehemmt wird, bleibt aber ein passiver Transport übrig, so daß möglicherweise einige passive Transportsysteme nur Relikte früherer aktiver Transportmechanismen sind. Übrigens wird auch für das Lactosesystem mit dem gleichen Carriermodell gearbeitet, mit dem Unterschied, daß die Reaktionsraten auf der Zyto-

plasmaseite der Membran durch die Energiezufuhr verändert werden, so daß sich das Gleichgewicht nicht bei gleicher Außen- und Innenkonzentration einstellt. Auch für Aminosäuren gibt es aktive Transportsysteme, z.B. im Säugetier-Dünndarm. Di- und Oligopeptide können in E.coli, einigen Hefen und Säugetierzellen angereichert werden [7].

I.3 Systeme mit chemischen Reaktionen und Transport-Vorgängen

3.1 Chemische Reaktionen

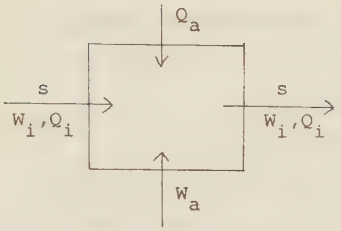
Die innere Energie U, die Temperatur T, Druck p, Volumen V und die Entropie S sind Zustandsgrößen eines thermodynamischen Systems. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik heißt

(1) $\quad dU = TdS - pdV$

dabei ist $dW = - pdV$ die am System geleistete Arbeit und $dQ = TdS$ die zugeführte Wärme.
Das Gibbsche Potential (freie Enthalpie)

(2) $\quad G := U + pV - TS$

eines Systems ist ebenfalls eine Zustandsgröße.
Wir betrachten jetzt ein System, das nicht nur Wärme und Arbeit, sondern auch Stoffe s mit seiner Umgebung austauscht. Dieses System kann z.B ein Gefäß sein, in dem chemische Reaktionen stattfinden. Die eintretenden



Stoffe sind dann die Ausgangsprodukte, die austretenden die Endprodukte. Die eintretenden Stoffe führen dem System Wärme Q_i zu und vergrößern das Volumen, während die austretenden Stoffe wieder Energie mitnehmen; durch den Stoffaustausch wird also die Energie

$$dW_i + dQ_i = - pdV_i + TdS_i \qquad \text{transportiert.}$$

Außerdem werde dem System direkt die Energie

$$dW_a + dQ_a = -pdV_a + TdS_a \qquad \text{zugeführt.}$$

Die Energiebilanz (1) liefert dann für die Änderung des Gibbschen Potentials

$$dG = dU + pdV_i - TdS_i = -pdV_a + TdS_a$$

Auf der rechten Seite steht die dem System über Wärme und Arbeit zugeführte Energie. Ein Prozeß läuft demnach nur unter äußerer Energiezufuhr ab, falls $dG > 0$. Für freiwillig ablaufende chemische Reaktionen ist dagegen $dG \leq 0$, und im stationären Zustand $dG = 0$. Die freie Enthalpie strebt deshalb einem lokalen Minimum zu. Wenn n_i die in mol angegebenen Mengen der an einer Reaktion beteiligten Partner sind, so ist

$$G = G(T,p,(n_i)_i)$$

$$(3) \qquad dG = \frac{\partial G}{\partial T}dT + \frac{\partial G}{\partial p}\,dp + \sum_i \frac{\partial G}{\partial n_i}\,dn_i \quad (= \sum_i \mu_i dn_i \,,$$

wenn eine Reaktion bei konstantem äußeren Druck und bei konstanter Umgebungstemperatur stattfindet). Die

$\mu_i(T,p,(n_j)_j) := \frac{\partial G}{\partial n_i}(T,p,(n_j)_j)$ heißen chemische

Potentiale. Für ideale Gase und für verdünnte Lösungen gilt

$$\mu_i = \tilde{\mu}_i^{\circ}(T,V) + RT \ln n_i$$

$$(4) \qquad = \mu_i^{\circ}(T) + RT \ln c_i \quad ,$$

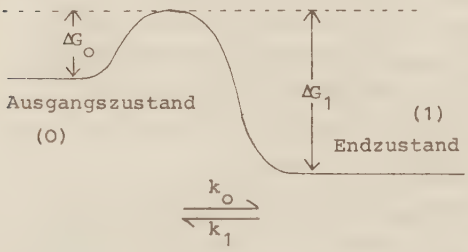
und $c_i = n_i/V$ ist die Konzentration der i-ten Substanz. Für jede chemische Reaktion ist $dn_i/z_i =: dn$ unabhängig von i, wenn die z_i die stöchiometrischen Zahlen sind, die für die Reaktanden auf der rechten Seite der Reaktionsgleichung negativ gerechnet werden müssen. Damit ist die Änderung der freien Enthalpie

$dG = \sum \mu_i dn_i = \sum \mu_i z_i dn$, und im stationären Zustand folgt aus dG=0: $\quad 0 = \sum z_i \mu_i^{\circ}(T) + RT \ln(\Pi c_i^{z_i})$

$$(5) \qquad \Pi c_i^{z_i} = \exp(-\sum z_i \mu_i^{\circ}/RT) \qquad \text{(Massenwirkungsgesetz).}$$

Aus diesen Überlegungen kann man vorhersagen, in welche Richtung eine chemische Reaktion ablaufen wird, jedoch nicht mit welcher Geschwindigkeit.

Nach der Theorie von Eyring [21] werden im Verlauf einer Reaktion energetisch ungünstige Zustände durchlaufen, wie es schematisch in der Abbildung dargestellt ist. Die Reaktionsgeschwindigkeit ist proportional zu der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Molekül des Zustandes (i) den Potentialberg überqueren kann; diese ist proportional zur Konzentration der Moleküle, die eine kinetische Energie



$\geq \Delta G_i$ besitzen, und damit ist die Reaktionskonstante k_i proportional zum Boltzmannfaktor $\exp(-\Delta G_i/RT)$.

Sind mehrere Moleküle an einer Reaktion beteiligt, so ist die Reaktionsgeschwindigkeit proportional zur Stoßwahrscheinlichkeit, also zum Produkt der Konzentrationen. Stöße von mehr als zwei Teilchen sind allerdings sehr unwahrscheinlich; Reaktionen, an denen mehr als zwei Partner beteiligt sind, laufen meistens in mehreren Schritten ab.
Im stationären Zustand werden durch Hin- und Rückreaktion gleich viele Moleküle umgesetzt, und es ergibt sich wieder das Massenwirkungsgesetz.

3.2 Diffusion

Diese Überlegungen gelten nur in gut gemischten Systemen. Wenn die Reaktionspartner nicht gleichmäßig im Lösungsmittel verteilt sind, entstehen Flüsse, die lokale Konzentrationsänderungen zur Folge haben. Zunächst werde nur eine Substanz betrachtet. Ihr chemisches Potential (4) ist $\mu(x) = \mu^o + RT \ln c(x)$. x ist dabei die Ortsvariable und c die ortsabhängige Konzentration. Die zugehörige Kraft ist $F = -\operatorname{grad} \mu = -RT (\operatorname{grad} c)/c$, die durch die Reibung aufgehoben wird, wenn die Geschwindigkeit eines Teilchens $v = uF$ beträgt mit der Beweglichkeit u (bei Kugeln ist $u = (6\pi r\eta)^{-1}$, r=Radius, η = Viskosität). Daraus ergibt sich ein Fluß

(6) $$j = cv = -uc \operatorname{grad} \mu = -uRT \operatorname{grad} c$$

$D := uRT$ heißt Diffusionskoeffizient.
Die Kontinuitätsgleichung liefert

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\operatorname{div} j = \operatorname{div} (D \operatorname{grad} c) \quad (= D\Delta c, \text{ falls D konstant})$$

Falls zusätzlich Reaktionen stattfinden, muß die Kontinuitätsgleichung durch eine Bilanzgleichung ersetzt werden (die r_i sind die Reaktionsterme):

$$(7) \qquad \frac{\partial c_i}{\partial t} = - \operatorname{div} j_i + r_i((c_k)_k) = \operatorname{div} (D \operatorname{grad} c) + r_i$$

Schließlich können noch elektrische Wechselwirkungen eine Rolle spielen. Wenn eine Substanz geladen ist, so ist ihr elektrochemisches Potential in einem elektrischen Feld $\mu + zF\psi$; dabei ist F die Faradaysche Konstante, z die Ladung des Moleküls und ψ das elektrostatische Potential. Damit ist die Kraft

$F = - RT \ (\operatorname{grad} c)/c - zF \operatorname{grad} \psi$ und der Fluß

$$(8) \qquad j = - uRT \cdot \operatorname{grad} c - zFu \cdot c \cdot \operatorname{grad} \psi$$

Im Falle der Massenerhaltung folgt

$$(9) \qquad \frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div} (D \cdot \operatorname{grad} c) + zF \cdot \operatorname{div}(uc \cdot \operatorname{grad} \psi)$$

Am Rand des betrachteten Gebietes gibt es mehrere Möglichkeiten. Für eine Substanz, die das Gebiet nicht verlassen kann, verschwindet die Normalkomponente des Flusses:

$$(10) \qquad j.n = -(\operatorname{grad} c).n = 0$$

Wenn die Wand ideal durchlässig ist, ist das chemische Potential

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_o^o + RT \ln c(x) & , x \notin \bar{G} \\ \mu_1^o + RT \ln c(x) & , x \in G \end{cases}$$

stetig, und daher für $x_o \in \partial G$

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \notin \bar{G}}} (\mu_o^o + RT \ln c(x)) = \lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in G}} (\mu_1^o + RT \ln c(x)) \quad \Rightarrow$$

$$(11) \qquad \frac{\lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ x \in G^o}} c(x)}{\lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ x \notin G^o}} c(x)} = e^{-\frac{\mu_1^o - \mu_o^o}{RT}} =: \alpha \ \text{(Partitionskoeffizient)}$$

Im allgemeinen ist aber die Grenzfläche eine Permeabilitätsschranke (die häufig allerdings eine geringere Rolle spielt als die Randschichten auf beiden Seiten [14]) was zu komplizierteren Randbedingungen führt. Der Einfachheit halber werde eine ebene Fläche (z.B. x=0) betrachtet. Ist sie eine beliebige Fläche in einem homogenen Medium, so findet man bei einer statistischen Herleitung [72], daß der Fluß durch diese Fläche durch

$j(0) = \frac{1}{4} \bar{v} \, (n(-\kappa l) - n(\kappa l))$ gegeben ist; dabei ist

n die Teilchenkonzentration, $\bar{v}$ die mittlere Geschwindigkeit, l die mittlere freie Weglänge und $\kappa \in (0,1]$. Entsprechend ist der Fluß über eine Grenzfläche

$$j(0) = \frac{\alpha_o}{4} \bar{v}_o \, n(-\kappa_o l_o) - \frac{\alpha_1}{4} \bar{v}_1 \, n(\kappa_1 l_1) \, ,$$

dabei gehören die mit o indizierten Größen zum linken Medium, die mit 1 indizierten zum rechten; die $\alpha_i \in [0,1]$ sind Durchlaßkoeffizienten.
Die Bilanz an der rechten Oberfläche ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_o^{\kappa_1 l_1} n(x)dx &= \frac{d}{dt} \, n(0+) \, \kappa_1 l_1 + O(l_1^2) \\
&= j(0) - j(\kappa_1 l_1) \\
&= \frac{\alpha_o}{4} \bar{v}_o n(-\kappa_o l_o) - \frac{\alpha_1}{4} \bar{v}_1 n(\kappa_1 l_1) \\
&\qquad - \frac{1}{4} \bar{v}_1 (n(0+) - n(2\kappa_1 l_1)) \\
&= \frac{1}{4}(\alpha_o \bar{v}_o n(0-) - \alpha_1 \bar{v}_1 n(0+)) - \frac{\alpha_o}{4} \bar{v}_o n'(0-) \, \kappa_o l_o \\
&\qquad + \frac{2-\alpha_1}{4} \bar{v}_1 n'(0+) \kappa_1 l_1 + O(l_1^2) + O(l_o^2)
\end{aligned} \tag{12}$$

Die Randbedingung hat daher die Form

$$(13) \qquad \frac{\partial c}{\partial t}(0+,t) = a_1 c(0-,t) - a_2 c(0+,t) - a_3 \frac{\partial c}{\partial x}(0-,t) + a_4 \frac{\partial c}{\partial x}(0+,t)$$

Hieraus kann man wieder Spezialfälle ableiten. Der vorher betrachtete Fall (11) ergibt sich, wenn man die Terme mit der Ordnung l_o und l_1 vernachlässigen kann; dies kann man jedoch nicht, wenn α_o und α_1 sehr klein sind. Wenn das linke Reservoir gut durchmischt ist, entfällt der dritte Summand auf der rechten Seite; wenn die mittleren Geschwindigkeiten groß sind, kann die linke Seite vernachlässigt werden. Dann erhält man die dritte Randbedingung

$$(14) \qquad - b \frac{\partial c}{\partial x}(0+,t) = a_1 c(0-,t) - a_2 c(0+,t)$$

und im Spezialfall $\alpha_o = \alpha_1 = 0$ wieder die Neumann-Randbedingung (10).

Der Randbedingung (13) muß man die entsprechende Randbedingung an der anderen Oberfläche hinzufügen. Man kann sie durch Annahmen ersetzen, etwa daß in diesem Reservoir eine räumlich und zeitlich konstante Konzentration aufrechterhalten werde.

Es sollen nun noch Fälle betrachtet werden, in denen auch Reaktionen auftreten können. Ist r der Reaktionsterm, so geht etwa die dritte Randbedingung (14) über in

$$(15) \qquad - b \frac{\partial c}{\partial x}(0+,t) + (a_2 c(0+,t) - a_1 c(0-,t)) = r(t)$$

Ist eine Grenzfläche undurchlässig für Substanzen, die miteinander reagieren können, so gilt nicht unbedingt für jede eine Neumannbedingung. Seien etwa zwei Teilchenarten mit den Konzentrationen n^1 und n^2 gegeben, die sich ineinander umwandeln können. Dann erhält man aus (12)

$$\frac{d}{dt} n^1(0+) = \frac{1}{2} \bar{v}_1^1 n^{1\prime}(0+) + r(n^1,n^2) + O(l_1)$$

$$\frac{d}{dt} n^2(0+) = \frac{1}{2} \bar{v}_1^2 n^{2\prime}(0+) - r(n^1,n^2) + O(l_1)$$

Falls die mittleren Geschwindigkeiten groß sind, ergeben sich daraus Randbedingungen

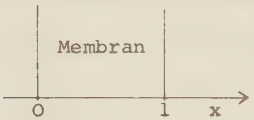
$$b_1 \frac{\partial c^1}{\partial x}(0,t) + b_2 \frac{\partial c^2}{\partial x}(0,t) = 0$$

$$- b_1 \frac{\partial c^1}{\partial x}(0,t) = r(c^1(0,t), c^2(0,t)) \tag{16}$$

Da b_1 und b_2 den mittleren Geschwindigkeiten und damit den Diffusionskoeffizienten proportional sind, besagt die erste der beiden Bedingungen erwartungsgemäß, daß der Gesamtfluß der beiden Substanzen über die Grenzfläche 0 ist.

I.4 Diffusion durch Membranen

Da die Ausdehnung einer Lipidmembran im Verhältnis zu ihrer Dicke groß ist, soll sie als eben angenommen werden. Außerdem kann man sie in lateraler Richtung als homogen betrachten, da Diffusionsraten entlang der Membranoberfläche groß sind und für einen schnellen Konzentrationsausgleich sorgen.
Dann kann man alle Transportprozesse durch eindimensionale Modelle beschreiben. Die Dicke der Membran sei 1, und sie soll an beiden Seiten an wäßrige Lösung grenzen, die gut durchmischt ist. Die Konzentrationen der betrachteten Substanz s seien in der wäßrigen Phase s_o und s_1. Bei idealer Durchlässigkeit der Grenzfläche ist die Konzentration an der Oberfläche der Membran dann αs_o beziehungsweise αs_1, wobei α der Partitionskoeffizient ist. Innerhalb der Membran diffun-



diere die Substanz mit einem Diffusionskoeffizienten D. Dann wird das System beschrieben durch das Randwertproblem

(17) $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(D\frac{\partial s}{\partial x})$ $\qquad s(0,t)=\alpha s_o \quad s(1,t)=\alpha s_1$

oder falls die Grenzfläche nicht ideal durchlässig ist (siehe (14)), lautet die Randbedingung

(17a) $-Db_o s'(0,t) = \alpha s_o - s(0,t), \quad Bb_1 s'(1,t) = \alpha s_1 - s(1,t)$

In den meisten Modellen wird angenommen, daß sich die Membran im Fließgleichgewicht befindet. Dann ist $\frac{\partial}{\partial x}(D\frac{\partial s}{\partial x}) = 0$, daher ist der Fluß $j = -D\frac{\partial s}{\partial x}$ konstant:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{j}{D} \Rightarrow \alpha(s_1 - s_o) = -\int_o^1 \frac{j}{D(x)}dx$$

$$\Rightarrow \quad j = -\alpha\left(\int_o^1 \frac{1}{D(x)}dx\right)^{-1}(s_1 - s_o)$$

Die Permeabilität ist daher

(18) $\alpha\left(\int_o^1 \frac{1}{D(x)}dx\right)^{-1}$ $(= \alpha D/l$, falls D konstant)

oder im Fall (17a) mit D=const

(18a) $\alpha(1/D + b_o + b_1)$

Wenn die Substanz geladen ist und in der Membran ein elektrisches Feld E eine Kraft auf diese Ionen ausübt, so gilt im stationären Zustand gemäß (8) entsprechend

$$j = -uRTs' + uzFEs \Rightarrow s' = \frac{zF}{RT}Es - \frac{j}{RTu} \Rightarrow$$

$$j = -\frac{s_1 - s_o e^{\frac{zF}{RT}\int_o^1 E(x)dx}}{\int_o^1 \frac{1}{RTu(x)} e^{\frac{zF}{RT}\int_x^1 E(\xi)d\xi} dx}\,\alpha$$

Dabei ist angenommen, daß der Einfluß der betrachteten Ionen auf das Feld vernachlässigt werden kann. Im Spezialfall konstanter Beweglichkeit u ergibt sich, wenn

das Feld $E = -\psi'$ näherungsweise konstant ist,

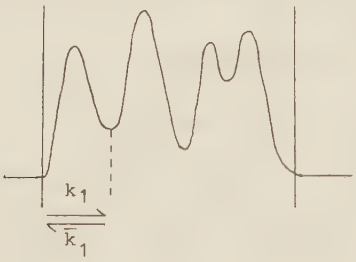
$$j = -\alpha zFuE \frac{s_1 - s_o e^{\frac{zF}{RT}El}}{e^{\frac{zF}{RT}El} - 1}$$

$$= -\alpha zFu \frac{\Delta\psi}{l} \frac{s_1 - s_o e^{-\frac{zF}{RT}\Delta\psi}}{1 - e^{-\frac{zF}{RT}\Delta\psi}} \qquad (19)$$

Dabei ist $\Delta\psi$ die Potentialdifferenz über die Membran.

Die Annahme, daß sich die Bewegungen von Teilchen innerhalb einer Membran durch Diffusion beschreiben lassen, setzt voraus, daß diese sich voneinander unabhängig bewegen und auch von der Anwesenheit anderer Spezies nicht beeinflußt werden. Diese Annahme ist nicht mehr gerechtfertigt, wenn es nicht allzu viele feste "Plätze" gibt, die nicht mehr eingenommen werden können, wenn bereits ein anderes Molekül dort sitzt. Durch die ausschließliche Beobachtung von Flüssen kann allerdings nicht unbedingt entschieden werden, ob in der "black box" Diffusion oder ein anderer Prozeß stattfindet. Man kann den Transportprozeß durch eine Membran mit verschiedenen Modellen beschreiben.

So wird eine Membran häufig als ein Energieprofil angesehen, in dem Moleküle sich über Barrieren von Bindungsplatz zu Bindungsplatz bewegen können[12]. Dieser Vorgang wird durch ein System von Reaktionsgleichungen beschrieben:



$$\frac{dc^i(t)}{dt} = k_i c^{i-1}(t) - (\bar{k}_i + k_{i+1}) c^i(t) + \bar{k}_{i+1} c^{i+1}(t) \quad , \; i=1..n-1 \tag{20}$$

$$c^o(t) = c_o \; , \; c^n(t) = c_1$$

Das Energieprofil braucht man sich nicht räumlich vorzustellen; es kann sich auch um eine Folge von Konformationsänderungen handeln, die ein Molekül nach dem Eintritt in eine Membran durchläuft. Wenn durch ein solches System ein passiver Transportvorgang beschrieben werden soll, so können die Reaktionskonstanten in (20) nicht beliebig sein. Wenn nämlich die äußeren Konzentrationen gleich sind ($c_o = c_1$), so darf im stationären Zustand kein Fluß durch die Membran fließen. Andernfalls wäre die Membran eine Maschine, die allein mit der inneren Energie der Umgebung Arbeit leisten könnte, was dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik widerspräche. Im stationären Zustand ist der Fluß

$$0 = j = k_1 c_o - \bar{k}_1 c^1 = k_i c^{i-1} - \bar{k}_i c^i = k_n c^{n-1} - \bar{k}_n c_1$$

für i=1..n-1, $\Rightarrow$

$$c_1 = (k_n/\bar{k}_n) c^{n-1} = (k_n/\bar{k}_n)(k_{n-1}/\bar{k}_{n-1}) c^{n-2} = \prod_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\bar{k}_i} c_o = c_o$$

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\bar{k}_i} = 1 \tag{21}$$

Ist die Anzahl n der Reaktionsschritte groß genug und sind die Gleichgewichtskonstanten $\bar{k}_i/k_i$ in der Größenordnung von 1, so ist dieser Mechanismus von der Diffusion nicht zu unterscheiden. Dies soll die folgende Überlegung zeigen:
Sei s eine Lösung von (17). Wenn D hinreichend glatt ist, so gilt dies auch für die Lösung s der Diffusionsgleichung; wenn man das Intervall [0,1] (oBdA sei l=1) durch $0=x_o < x_1 < \ldots < x_n=1$ in n Intervalle teilt, so kann man die rechte Seite diskretisieren

$$s^o = \alpha s_o \qquad s^n = \alpha s_1 \qquad s^i(t) = s(x_i,t),\ i=1..n-1 \Rightarrow$$

$$\frac{ds^i(t)}{dt} = \frac{2}{x_{i+1}-x_{i-1}} \left(D\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) s'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) - D\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right) s'\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right) \right) + O(\delta)$$

$$= \frac{2}{x_{i+1}-x_{i-1}} \left(D\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) \frac{s(x_{i+1})-s(x_i)}{x_{i+1}-x_i} - D\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right) \frac{s(x_i)-s(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} \right) + O(\delta)$$

$$= \frac{2\, D\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})}\, s^{i-1}(t)$$

$$-\left(\frac{2D\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})} + \frac{2D\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\right) s^i(t)$$

$$+ \frac{2\, D\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\, s^{i+1}(t) + O(\delta)$$

mit $\delta := \sup \{|x_i - x_{i-1}| \mid i=1\ldots n\}$

Definiert man

$$\bar{k}_i := \frac{2\, D\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})} \qquad i = 1..n-1$$

$$k_i := \frac{2\, D\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)}{(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})} \qquad i = 2,..n$$

k_1 beliebig ($\approx \alpha \bar{k}_1$)

$$\bar{k}_n := \left(\prod_{i=1}^{n} k_i\right) / \left(\prod_{i=1}^{n-1} \bar{k}_i\right), \quad x_{-1} := x_1 - \frac{2D\left(\frac{x_o+x_1}{2}\right)}{k_1(x_1-x_o)}$$

$$c_o = \alpha s_o \qquad c_1 = \alpha s_1$$

$$c^i = \frac{1}{\alpha} \prod_{j=1}^{i} \frac{k_j}{\bar{k}_j}\, s^i = \frac{1}{\alpha} \prod_{j=1}^{i} \frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{x_j-x_{j-2}}\, s^i \qquad (22)$$

so gilt $c^o = s_o$, $c^n = s_1$

$$\frac{d}{dt} c^i(t) = k_i c^{i-1}(t) - (\bar{k}_i + k_{i+1}) c^i(t) + \bar{k}_{i+1} c^{i+1}(t)$$

Dies kann als Folge von chemischen Reaktionen gemäß (20) gedeutet werden, wobei die Bedingung (21) automatisch erfüllt ist. Die Zuordnung der $2n-1$ Variablen $k_1,..k_n$, $k_1,..k_{n-1}$ zu den $2n-1$ unabhängigen Variablen $D(\frac{x_o+x_1}{2})$, .. $D(\frac{x_{n-1}+x_n}{2})$, $x_1,...x_{n-1}$ ist nicht eindeutig, aber die Wahl von k_1 ändert nur das Konzentrationsprofil im Innern und nichts am beobachtbaren Verhalten. Die Zuordnung (22) ist insofern natürlich, als die s_i Konzentrationen, die c_i dagegen Mengen, also extensive Größen sind, für die die Massenerhaltung gelten muß. Sie gehen aus den intensiven Größen durch Multiplikation mit dem Volumen, das sie einnehmen, hervor (in diesem Fall eindimensional).

Ist umgekehrt ein System von Reaktionsgleichungen (20), das die Bedingung (21) erfüllt, für c gegeben mit den $2n-1$ unabhängigen Variablen $k_1,..k_n,\bar{k}_1,..\bar{k}_{n-1}$, so kann man die Zuordnung umkehren, wenn die Konstanten $\bar{k}_i/k_i$ (i=2..n-1) nicht zu sehr von 1 abweichen. Nach Wahl von x_1 (in der Größenordnung 1/n) werden die übrigen Größen definiert durch

$$x_2 := \begin{cases} (1 + \frac{k_2k_3}{\bar{k}_2\bar{k}_3} + \frac{k_2k_3k_4k_5}{\bar{k}_2\bar{k}_3\bar{k}_4\bar{k}_5} + .. \frac{k_2k_3..k_{n-1}}{\bar{k}_2\bar{k}_3..\bar{k}_{n-1}})^{-1} & \text{,n gerade} \\ (\frac{k_2}{\bar{k}_2} + \frac{k_2k_3k_4}{\bar{k}_2\bar{k}_3\bar{k}_4} + .. \frac{k_2k_3..k_{n-1}}{\bar{k}_2\bar{k}_3..\bar{k}_{n-1}})^{-1} (1-x_1) & \text{,n ungerade} \end{cases}$$

$$x_i := x_{i-2} + \frac{k_2k_3..k_{i-1}}{\bar{k}_2\bar{k}_3..\bar{k}_{i-1}} x_2 \qquad \text{für } i=3,..n-1$$

$$D(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}) := \frac{k_{i+1}}{2}(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i) \qquad \text{für } i=0,..n-1$$

Diese Zuordnung ist möglich, wenn bei passender Wahl von x_1 die daraus erzeugte Folge $x_o, x_1, x_2 \ldots x_n$ streng monoton wachsend ist. Bei sehr verschiedenen Reaktionsraten wird dies im allgemeinen nicht möglich sein. Aber auch dieser Fall läßt sich auf ein Diffusionsproblem zurückführen, wenn man einen Driftterm hinzufügt, der zum Beispiel elektrostatische Wechselwirkungen beschreiben könnte (vgl. (9)):

$$\frac{\partial s}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(D(x)\,\frac{\partial s}{\partial x}(x,t)) + \frac{\partial}{\partial x}(g(x)s(x,t))$$

Bei einer Unterteilung von [0,1] in n gleich große Intervalle der Länge $\delta = 1/n$ gilt dann wie vorher

$$\begin{aligned}
\frac{ds^i}{dt} &= \frac{1}{\delta}\Big(D(\tfrac{x_i+x_{i+1}}{2})s'(\tfrac{x_i+x_{i+1}}{2}) - D(\tfrac{x_i+x_{i-1}}{2})s'(\tfrac{x_i+x_{i-1}}{2})\Big) \\
&\quad + \frac{1}{2\delta}\,(g(x_{i+1})s(x_{i+1}) - g(x_{i-1})s(x_{i-1})) + O(\delta^2) \\
&= \frac{1}{\delta}\Big(D(\tfrac{x_i+x_{i+1}}{2})\frac{s^{i+1}-s^i}{\delta} - D(\tfrac{x_i+x_{i-1}}{2})\frac{s^i-s^{i-1}}{\delta} \\
&\qquad + \frac{g(x_{i+1})}{2}\,s^{i+1} - \frac{g(x_{i-1})}{2}\,s^{i-1}\Big) + O(\delta) \\
&= (\frac{1}{\delta^2}D(\tfrac{x_i+x_{i+1}}{2}) + \frac{g(x_{i+1})}{2\delta})s^{i+1} \\
&\qquad - (\frac{1}{\delta^2}D(\tfrac{x_i+x_{i+1}}{2}) + \frac{1}{\delta^2}D(\tfrac{x_i+x_{i-1}}{2}))s^i \\
&\qquad + (\frac{1}{\delta^2}D(\tfrac{x_i+x_{i-1}}{2}) - \frac{g(x_{i-1})}{2\delta})s^{i-1} + O(\delta)
\end{aligned}$$

Dies ist bereits das Reaktionsmodell (OBdA sei $\alpha = 1$), wenn

$$k_i := \frac{1}{\delta^2}\,D(\tfrac{x_i+x_{i-1}}{2}) - \frac{g(x_{i-1})}{2\delta} \qquad i = 1, \ldots n$$

$$\bar{k}_i := \frac{1}{\delta^2}\,D(\tfrac{x_i+x_{i-1}}{2}) + \frac{g(x_i)}{2\delta} \qquad i = 1, \ldots n$$

gesetzt wird.

Die Umkehrung ist in diesem Fall klar:

g(0) beliebig

$$D\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right) = \delta^2 k_i + \frac{\delta}{2} g(x_{i-1}) \quad , i = 1,..n$$

$$g(x_i) = \delta\ (\bar{k}_i - k_i) - g(x_{i-1}) \ , \ i=1,..n-1$$

Wenn das Potential auf beiden Seiten der Membran gleich ist, so ist im Diffusionsmodell

$\int_0^1 \frac{g(x)}{D(x)}\, dx = 0$ oder in der Diskretisierung

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{g(x_i)+g(x_{i-1})}{2D\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)} \quad \rightarrow$$

$$-\frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{g(x_{i-1})}{2D\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)} = \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{g(x_i)}{2D\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)}$$

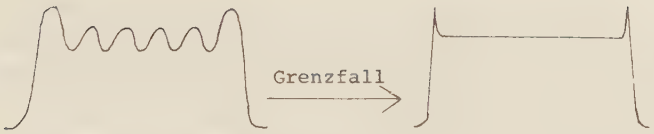
$$-\frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} D\left(\frac{x_j+x_{j-1}}{2}\right) = \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} D\left(\frac{x_j+x_{j-1}}{2}\right)$$

$$\prod_{i=1}^{n} \left(D\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right) - \frac{\delta}{2} g(x_{i-1})\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(D\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right) + \frac{\delta}{2} g(x_i)\right) + O(\delta^2)$$

$$\prod_{i=1}^{n} (\delta^2 k_i) = \prod_{i=1}^{n} (\delta^2 \bar{k}_i) + O(\delta^2)$$

$\prod_{i=1}^{n} (\bar{k}_i / k_i) = 1$ ist aber gerade die Bedingung (21) für die energetische Gleichheit der beiden Seiten der Membran im diskreten Modell.

Im folgenden soll angenommen werden, daß die Membran im Innern homogen ist. Der Transport wird dann durch eine Diffusionsgleichung mit konstantem Diffusionskoeffizienten beschrieben, im diskreten Fall entspricht diese Annahme dem Danielli-Modell [15], bei dem das Energieprofil aus gleich großen Energiebarrieren besteht. Diesen Sonderfall beschreibt man am besten durch die Diffusionsgleichung $\dot{s} = Ds''$ im Innern und den diskreten



Ansatz an den beiden Rändern

$$\frac{\partial s}{\partial t}(0,t) = ks_o - \bar{k}s(0,t) + d(s(\delta,t)-s(0,t))$$
$$= ks_o - \bar{k}s(0,t) + d(\delta s'(0,t) + O(\delta^2))$$

Da k, $\bar{k}$ und d sich für $\delta \to 0$ wie $O(\delta^{-2})$ verhalten, kommt man häufig mit einer Dirichletbedingung aus, d.h. daß sich am Rand momentan ein lokales Gleichgewicht einstellt:

$$s(0,t) = \frac{k}{\bar{k}} s_o \quad , \quad s(1,t) = \frac{k}{\bar{k}} s_1 \quad , \quad \text{und } \alpha := \frac{k}{\bar{k}}$$

ist der Partitionskoeffizient.
Wenn man den Einfluß der Grenzschicht nicht vernachlässigen kann, heißt die adäquate Randbedingung, die (14) entspricht

$$s(0,t) = \alpha s_o + Db\, s'(0,t) \quad , \quad s(1,t) = \alpha s_1 - Db\, s'(1,t)$$

b kann dabei als Dicke der Randschicht oder als Widerstand der Grenzfläche gedeutet werden.

I.5 Erleichterte Diffusion

Diffusion ist ein langsamer Prozeß, insbesondere dann, wenn die Aufnahmefähigkeit der Membran für die betreffende Sustanz gering ist ($\alpha \ll 1$) oder die Beweglichkeit in der Membran klein ist (D sehr klein). Zellen benutzen Mechanismen, die die Kapazität oder die Beweglichkeit erhöhen und damit die Transportrate vergrö-

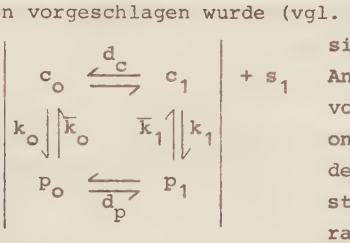
ßern. Für das Danielli-Modell kann man sich entsprechend vorstellen, daß die Energiebarrieren katalytisch erniedrigt werden. Man spricht von erleichteter Diffusion oder erleichtertem Transport. Es gibt zwar sehr unterschiedliche Transportsysteme, die aber ein Charakteristikum gemeinsam haben und sich damit von der gewöhnlichen Diffusion unterscheiden: Die Moleküle, die den erleichterten Transport vermitteln, liegen in begrenzter Anzahl vor; daher wächst die Transportrate nicht linear mit dem Konzentrationsgradienten, sondern mündet in eine Sättigung ein. Mehrere Substanzen, die dasselbe Transportsystem benutzen (z.B. chemisch gleiche aber unterschiedlich markierte Moleküle), beeinflussen sich gegenseitig. Bei der freien Diffusion ist der Fluß im Fließgleichgewicht gegeben durch (18)

$$j = -\frac{\alpha D}{l}(s_1 - s_o) = -P(s_1 - s_o) ,$$

dabei sind s_o und s_1 die jeweiligen Substratkonzentrationen auf den beiden Seiten, D der (konstante) Diffusionskoeffizient, α der Partitionskoeffizient und l die Dicke der Membran. P wird als Permeabilität bezeichnet. Auch bei erleichterter Diffusion ist es üblich, den Fluß durch $j = -P(s_1 - s_o)$ anzugeben, doch hängt die Permeabilität von s_o, s_1, der Konzentration der den Transport vermittelnden Moleküle und den Konzentrationen eventueller Kompetitoren ab.

In den einfacheren Modellen wird angenommen, daß die Membran so dünn ist, daß sich in ihrem Innern sofort ein stationärer Zustand einstellt und die räumliche Inhomogenität vernachlässigt werden kann. Alle Flüsse sind dann durch die Systemparameter und die Substratkonzentrationen auf den beiden Seiten der Membran determiniert. Von allen Reaktionen wird angenommen, daß sie sich auf einer der beiden Seiten und nie im Innern der Membran abspielen.

Das Modell für den Transport durch einen beweglichen Carrier, wie es zum Beispiel für Valinomycin, einige Entkoppler, passiven Transport von Zuckern und Aminosäuren vorgeschlagen wurde (vgl. Abschnitt 2), läßt



sich unter den obigen Annahmen als ein System von chemischen Reaktionen beschreiben, bei dem die Diffusionskonstanten als Reaktionsraten angesehen werden. s_i, c_i und p_i sind die jeweiligen Konzentrationen des Substrats, des unbeladenen und des beladenen Carriers auf den beiden Seiten der Membran. In diesem Modell wurde angenommen, daß im Innern der Membran weder der beladene noch der unbeladene Carrier akkumuliert werden kann (die Reaktionsraten, die die Diffusion simulieren, sind in beiden Richtungen gleich), daß aber die chemische Reaktion auf den beiden Seiten der Membran unter unterschiedlichen Bedingungen ablaufen kann. Ist $\bar{k}_o/k_o = \bar{k}_1/k_1$, so ist der Transport passiv, nur sind unter Umständen die Aktivierungsenergien auf den beiden Seiten verschieden. Wenn auch die beiden Affinitäten $\bar{k}_o/k_o$ und $\bar{k}_1/k_1$ sich unterscheiden, wird der Zyklus vorzugsweise in einer Richtung durchlaufen und das Substrat auf einer Seite angereichert, was nur unter ständigem Energieverbrauch möglich ist.
Der Carrier soll die Membran nicht verlassen können, daher ist die Größe $C = (c_o+c_1+p_o+p_1)/2$ konstant. Das Modell wird dann durch das folgende System von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\dot{c}_o = d_c(c_1-c_o)+\bar{k}_o p_o - k_o s_o c_o \quad , \quad \dot{c}_1 = -d_c(c_1-c_o)+\bar{k}_1 p_1 - k_1 s_1 c_1$$

(23)
$$\dot{p}_o = d_p(p_1-p_o)-\bar{k}_o p_o + k_o s_o c_o \quad , \quad \dot{p}_1 = -d_p(p_1-p_o)-\bar{k}_1 p_1 + k_1 s_1 c_1$$

$$c_o+c_1+p_o+p_1 = 2C$$

oder

(23) $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c \\ p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c \\ p \end{pmatrix}, \quad c_o+c_1+p_o+p_1 = 2C$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -(d_c+k_o s_o) & d_c & \bar{k}_o & 0 \\ d_c & -(d_c+k_1 s_1) & 0 & \bar{k}_1 \\ k_o s_o & 0 & -(d_p+\bar{k}_o) & d_p \\ 0 & k_1 s_1 & d_p & -(d_p+\bar{k}_1) \end{pmatrix}$$

Im stationären Zustand ist $c_o=c_1=p_o=p_1=0$, und der Fluß des Substrats ist durch

$$j = -d_p(p_1-p_o) = d_c(c_1-c_o) = \bar{k}_1 p_1 - k_1 s_1 c_1 = k_o s_o c_o - \bar{k}_o p_o$$

gegeben. Nach Lösung des Gleichungssystems

$$A \begin{pmatrix} c \\ p \end{pmatrix} = 0, \quad c_o+c_1+p_o+p_1 = 2C, \quad j = -d_p(p_1-p_o)$$

erhält man

$$j = -\frac{C\left(\frac{k_1}{\bar{k}_1} s_1 - \frac{k_o}{\bar{k}_o} s_o\right)}{\left(\frac{1}{d_p}+\frac{1}{\bar{k}_o}+\frac{1}{\bar{k}_1}\right) + \frac{k_o s_o + k_1 s_1}{\bar{k}_o \bar{k}_1} + \left(\frac{1}{d_p}+\frac{1}{d_c}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{k_o s_o}{\bar{k}_o}+\frac{k_1 s_1}{\bar{k}_1}\right) + \frac{k_o s_o \, k_1 s_1}{d_c \, \bar{k}_o \bar{k}_1}}$$

(24)

$$= \frac{-C D (s_1/K_1 - s_o/K_o)}{1 + D\frac{k_o s_o + k_1 s_1}{\bar{k}_o \bar{k}_1} + \frac{D}{d}\left(\frac{s_o}{K_o}+\frac{s_1}{K_1}\right) + \frac{D}{d_c}\frac{s_o s_1}{K_o K_1}}$$

mit $d := 2\left(\frac{1}{d_p}+\frac{1}{d_c}\right)^{-1}$, $D := \left(\frac{1}{d_p}+\frac{1}{\bar{k}_o}+\frac{1}{\bar{k}_1}\right)^{-1}$,

$K_i := \bar{k}_i / k_i$

Das Gleichgewicht ist außerdem stabil. Dazu muß gezeigt werden, daß die 0 ein einfacher Eigenwert von A ist und die übrigen Eigenwerte negativen Realteil haben: Es sei $L > \max\{|a_{ii}| \mid 1 \leq i \leq 4\}$. Dann ist

$A+LI \geq 0$, $(A+LI)^2 > 0 \Rightarrow e^A e^L = e^{A+LI} > 0 \Rightarrow e^A > 0$.
Daher hat e^A einen einfachen Eigenwert $\mu > 0$ mit positivem Eigenvektor, und für alle andere Eigenvektoren und -werte (x, e^λ) gilt: $|e^\lambda| < e^\mu$ und $x \not\geq 0$ (Perron). Da 1 ein Eigenwert zum Eigenvektor $(1,1,1,1) > 0$ ist, folgt $e^\mu = 1$, $\mu = 0$ und $\operatorname{re} \lambda < 0$ für alle anderen Eigenwerte λ von A.
Wenn durch die Membran kein aktiver Transport stattfinden kann, so ist $K_o = K_1 =: K$ und der Fluß

$$(25) \qquad j = \frac{-D\,C\,(s_1 - s_o)}{K + D\left(\frac{s_o}{\bar{k}_o} + \frac{s_1}{\bar{k}_1}\right) + \frac{D}{d}(s_o + s_1) + \frac{D s_o s_1}{d_c K}}$$

Ist die Membran symmetrisch bezüglich des Transportsystems, so ist $k_o = k_1 =: k$, $\bar{k}_o = \bar{k}_1 =: \bar{k}$ und

$$(26) \qquad j = \frac{-DKC\,(s_1 - s_o)}{K^2 + DK\left(\frac{1}{\bar{k}} + \frac{1}{d}\right)(s_o + s_1) + \frac{D}{d_c} s_o s_1}$$

Wenn zwei verschiedene Substanzen s und s* dasselbe Transportsystem benutzen, so wird die Dynamik analog beschrieben:

$$\dot{c}_o = d_c(c_1 - c_o) + (\bar{k}_o p_o + \bar{k}_o^* p_o^*) - (k_o s_o + k_o^* s_o^*) c_o$$
$$\dot{c}_1 = -d_c(c_1 - c_o) + (\bar{k}_1 p_1 + \bar{k}_1^* p_1^*) - (k_1 s_1 + k_1^* s_1^*) c_1$$
$$\dot{p}_o = d_p(p_1 - p_o) - \bar{k}_o p_o + k_o s_o c_o$$
$$\dot{p}_1 = -d_p(p_1 - p_o) - \bar{k}_1 p_1 + k_1 s_1 c_1$$
$$\dot{p}_o^* = d_p^*(p_1^* - p_o^*) - \bar{k}_o^* p_o^* + k_o^* s_o^* c_o$$
$$\dot{p}_1^* = -d_p^*(p_1^* - p_o^*) - \bar{k}_1^* p_1^* + k_1^* s_1^* c_1$$
$$2C = c_o + c_1 + p_o + p_1 + p_o^* + p_1^*$$

Es gibt wieder genau einen stationären Zustand, von dem man genauso zeigt, daß er stabil ist. Die Flüsse für

die beiden Substanzen sind in diesem Fall

$$j = - d_p(p_1-p_o) \quad , \quad j^* = - d_p^*(p_1^*-p_o^*)$$

und nach Lösung des Gleichungssystems ergibt sich

$$(27) \qquad j = - \frac{CD}{N} \left(\frac{s_1}{K_1} - \frac{s_o}{K_o} + \frac{D^*}{d_c} \left(\frac{s_1 s_o^*}{K_1 K_o^*} - \frac{s_o s_1^*}{K_o K_1^*} \right) \right)$$

$$j^* = - \frac{CD^*}{N} \left(\frac{s_1^*}{K_1^*} - \frac{s_o^*}{K_o^*} + \frac{D}{d_c} \left(\frac{s_1^* s_o}{K_1^* K_o} - \frac{s_o^* s_1}{K_o^* K_1} \right) \right)$$

mit $D = \left(\frac{1}{d_p} + \frac{1}{\bar{k}_o} + \frac{1}{\bar{k}_1}\right)^{-1}$, $D^* = \left(\frac{1}{d_p^*} + \frac{1}{\bar{k}_o^*} + \frac{1}{\bar{k}_1^*}\right)^{-1}$

$$K_i = \bar{k}_i / k_i \quad , \quad K_i^* = \bar{k}_i^* / k_i^* \ ,$$

$$N = 1 + D \frac{k_o s_o + k_1 s_1}{\bar{k}_o \bar{k}_1} + D^* \frac{k_o^* s_o^* + k_1^* s_1^*}{\bar{k}_o^* \bar{k}_1^*} + \frac{D}{d} \left(\frac{s_o}{K_o} + \frac{s_1}{K_1} \right) + \frac{D^*}{d^*} \left(\frac{s_o^*}{K_o^*} + \frac{s_1^*}{K_1^*} \right)$$

$$+ \frac{DD^*}{2d_c} \left(\frac{1}{d_p} + \frac{1}{d_p^*} \right) \left(\frac{s_o^*}{K_o^*} \frac{s_1}{K_1} + \frac{s_o}{K_o} \frac{s_1^*}{K_1^*} \right)$$

$$+ \frac{1}{d_c} \left(D \frac{s_o}{K_o} \frac{s_1}{K_1} + D^* \frac{s_o^*}{K_o^*} \frac{s_1^*}{K_1^*} + DD^* \left(\frac{1}{\bar{k}_o} + \frac{1}{\bar{k}_1^*} \right) \frac{s_o^*}{K_o^*} \frac{s_1}{K_1} + DD^* \left(\frac{1}{\bar{k}_o^*} + \frac{1}{\bar{k}_1} \right) \frac{s_o}{K_o} \frac{s_1^*}{K_1^*} \right)$$

$$d = 2\left(\frac{1}{d_p} + \frac{1}{d_c}\right)^{-1} \quad , \quad d^* = 2\left(\frac{1}{d_p^*} + \frac{1}{d_c}\right)^{-1}$$

In einem solchen Transportsystem ist ein aktiver Transport möglich, wenn auf einer Seite der Membran durch eine Energiequelle die Gleichgewichtskonstanten verschoben werden (d.h. $\bar{k}_1/k_1 \neq \bar{k}_o/k_o$ oder $\bar{k}_1^*/k_1^* \neq \bar{k}_o^*/k_o^*$) Die Dynamik ist aber identisch mit einem rein passiven Trägertransport, in dem die Konzentrationen statt durch die s_i durch s_i/K_i gegeben sind.

Bei einer Membran mit identischen energetischen Verhältnissen auf beiden Seiten der Membran ist der durch Träger vermittelte Transport passiv. Wenn jedoch außer dem Substrat A eine zweite Substanz B dasselbe Transportsystem benutzt, kann ein Fluß von A gegen sein Konzentrationsgefälle induziert werden. Dies wird noch untersucht.
Für das kompetitive Transportsystem sollen noch einige Spezialfälle betrachtet werden:

1. Die Substanzen s und s* seien chemisch identisch (s* sei z.B. radioaktiv markiert). Dann ist $k_i = k_i^*$, $k_{\bar{i}} = k_{\bar{i}}^*$, $d_p = d_p^*$ und

(28)
$$j = -\frac{CD}{N}\left(\frac{s_1}{K_1} - \frac{s_o}{K_o} + \frac{D}{d_c K_o K_1}(s_o^* s_1 - s_1^* s_o)\right)$$
$$j^* = -\frac{CD}{N}\left(\frac{s_1^*}{K_1} - \frac{s_o^*}{K_o} - \frac{D}{d_c K_o K_1}(s_o^* s_1 - s_1^* s_o)\right)$$
$$N = 1 + D\,\frac{k_o(s_o+s_o^*)+k_1(s_1+s_1^*)}{\bar{k}_o\,\bar{k}_1} + \frac{D}{\bar{d}}\left(\frac{s_o+s_o^*}{K_o} + \frac{s_1+s_1^*}{K_1}\right) + \frac{D}{d_c}\,\frac{s_o s_1 + s_o s_1^* + s_o^* s_1 + s_o^* s_1^*}{K_o K_1}$$

a) Setzt man zusätzlich $s_o^* = s_1 = 0$ und benennt s_1^* wieder um in s_1, so erhält man die unidirektionalen Flüsse

(29)
$$j_{\rightarrow} = \frac{C D K_o^{-1}\left(1 + \frac{D}{d_c}\frac{s_1}{K_1}\right) s_o}{1 + D\,\frac{k_o s_o + k_1 s_1}{\bar{k}_o\,\bar{k}_1} + \frac{D}{\bar{d}}\left(\frac{s_o}{K_o} + \frac{s_1}{K_1}\right) + \frac{D}{d_c}\frac{s_o}{K_o}\frac{s_1}{K_1}}$$
$$j_{\leftarrow} = \frac{C D K_1^{-1}\left(1 + \frac{D}{d_c}\frac{s_o}{K_o}\right) s_1}{1 + D\,\frac{k_o s_o + k_1 s_1}{\bar{k}_o\,\bar{k}_1} + \frac{D}{\bar{d}}\left(\frac{s_o}{K_o} + \frac{s_1}{K_1}\right) + \frac{D}{d_c}\frac{s_o}{K_o}\frac{s_1}{K_1}}$$

Der Nettofluß ergibt sich natürlich wieder als $j = j_{\rightarrow} - j_{\leftarrow}$.

b) Equilibriert man das System mit unmarkierter Substanz (d.h. $s_o/K_o = s_1/K_1 =: s/K$) und fügt markierte hinzu, so ist der "Tracer"-Fluß

$$(30) \qquad j^* = -\frac{C\,D}{(1 + s/K)\,N}\,(s_1^*/K_1 - s_o^*/K_o)$$

mit

$$N = 1 + \frac{D}{1 + \frac{s}{K}}\,\frac{k_o s_o^* + k_1 s_1^*}{(1 + \frac{D}{d_c}\frac{s}{K})\,k_o k_1} + \frac{D}{d}\,\frac{1 + \frac{d}{d_c}\frac{s}{K}}{(1 + \frac{s}{K})(1 + \frac{D}{d_c}\frac{s}{K})}\left(\frac{s_o^*}{K_o} + \frac{s_1^*}{K_1}\right)$$

$$+ \frac{D}{d_c}\,\frac{1}{(1 + \frac{s}{K})(1 + \frac{D}{d_c}\frac{s}{K})}\,\frac{s_o^*}{K_o}\,\frac{s_1^*}{K_1}$$

Dieser Fluß entspricht dem Fluß in einem Transportsystem ohne Kompetitor, das durch die Parameter $\tilde{k}_i$, $\tilde{\bar{k}}_i$, $\tilde{d}_p$ und $\tilde{d}_c$ beschrieben wird mit

$$\tilde{\bar{k}}_i = \bar{k}_i\,\frac{1 + \frac{D}{d_c}\frac{s}{K}}{1 + \frac{s}{K}} \qquad \frac{\tilde{k}_i}{\tilde{\bar{k}}_i} = \frac{k_i}{\bar{k}_i}\,\frac{1}{1 + \frac{s}{K}}$$

$$\frac{\tilde{d}_c}{\tilde{\bar{k}}_i} = \frac{d_c}{\bar{k}_i}\,\frac{1}{1 + \frac{s}{K}} \qquad \frac{\tilde{d}_p}{\tilde{\bar{k}}_i} = \frac{d_p}{\bar{k}_i}\,\frac{1}{\frac{d_c}{d_p} + \frac{s}{K}}$$

Ersetzt man diese Größen in (24), so erhält man (30). $|j^*|$ nimmt nicht notwendig mit wachsendem s ab. Dieser Effekt wird als kompetitive Beschleunigung bezeichnet.

2. Falls die Reaktionsraten sehr viel größer sind als die Diffusionsraten, stellt sich an den Rändern der Membran praktisch ein chemisches Gleichgewicht ein, und die Flüsse ergeben sich in diesem Fall aus dem

Grenzübergang in (24) und (27) zu

$$(31) \qquad j = \frac{-d_p C \left(\frac{s_1}{K_1} - \frac{s_o}{K_o}\right)}{1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{d_p}{d_c}\right)\left(\frac{s_o}{K_o} + \frac{s_1}{K_1}\right) + \frac{d_p}{d_c}\frac{s_o}{K_o}\frac{s_1}{K_1}}$$

und im Falle der Kompetition

$$(32) \qquad j = \frac{-d_p C \left(\frac{s_1}{K_1} - \frac{s_o}{K_o} + \frac{d_p^*}{d_c}\left(\frac{s_1 s_o^*}{K_1 K_o^*} - \frac{s_o s_1^*}{K_o K_1^*}\right)\right)}{1 + \frac{d_p}{d}\left(\frac{s_o}{K_o} + \frac{s_1}{K_1}\right) + \frac{d_p^*}{d^*}\left(\frac{s_o^*}{K_o^*} + \frac{s_1^*}{K_1^*}\right) + \frac{1}{d_c}\left(d\frac{s_o s_1}{p K_o K_o} + d^*\frac{s_o^* s_1^*}{p K_o^* K_1^*} + \frac{d_p + d^*}{2}\frac{s^* s}{p}\left(\frac{s_o^*}{K_o^* K_1} + \frac{s_o s_1^*}{K_o K_1^*}\right)\right)}$$

Im Spezialfall $d_p = d_c$ ist der Fluß

$$(33) \qquad j = \frac{-d C \left(\frac{s_1}{K_1} - \frac{s_o}{K_o}\right)}{\left(1 + \frac{s_o}{K_o}\right)\left(1 + \frac{s_1}{K_1}\right)} = -dC \left(\frac{\frac{s_1}{K_1}}{1 + \frac{s_1}{K_1}} - \frac{\frac{s_o}{K_o}}{1 + \frac{s_o}{K_o}}\right)$$

Der Fluß setzt sich also formal aus zwei Teilflüssen mit Michaelis-Menten-Kinetik zusammen, die man mit dem Grenzübergang in (29) als die unidirektionalen Flüsse identifiziert. Es gilt also

$j_{\rightarrow} = |j|_{|s_1=0}$ und $j_{\leftarrow} = |j|_{|s_o=0}$. Die beiden Seiten sind in diesem Fall also unabhängig voneinander in dem Sinne, daß eine Veränderung der Konzentration auf der gegenüberliegenden Seite keinen Einfluß auf den unidirektionalen Fluß hat.

Bei Kompetition ist der Fluß entsprechend im Falle $d_p = d_p^* = d_c$

$$(34) \qquad j = -dC \left(\frac{s_1/K_1}{1 + \frac{s_1}{K_1} + \frac{s_1^*}{K_1^*}} - \frac{s_o/K_o}{1 + \frac{s_o}{K_o} + \frac{s_o^*}{K_o^*}} \right)$$

$$= -dC \left(\frac{s_1}{K_1 + s_1 + s_1^*} - \frac{s_o}{K_o + s_o + s_o^*} \right) \text{ falls } \begin{matrix} K_o = K_o^* \\ K_1 = K_1^* \end{matrix}$$

Die unidirektionalen Flüsse teilen sich im Verhältnis der jeweiligen Konzentrationen auf der entsprechenden Seite auf:

$$j_{\rightarrow}/j_{\rightarrow}^* = \frac{s_o/K_o}{s_o^*/K_o^*} \; (= s_o/s_o^*) \quad , \quad j_{\leftarrow}/j_{\leftarrow}^* = \frac{s_1/K_1}{s_1^*/K_1^*} \; (= s_1/s_1^*)$$

3. Umgekehrt kann man auch den Grenzfall sehr großer Diffusionsraten betrachten. In diesem Fall ist

$$(35) \qquad j = \frac{\frac{-C\bar{k}}{2} (s_1/K_1 - s_o/K_o)}{1 + \frac{k_o s_o + k_1 s_1}{\bar{k}_o + \bar{k}_1}} \quad , \; \bar{k} := 2\left(\frac{1}{\bar{k}_o} + \frac{1}{\bar{k}_1}\right)^{-1}$$

und bei Kompetition

$$j = \frac{-C \frac{\bar{k}}{2} (s_1/K_1 - s_o/K_o)}{1 + \frac{k_o s_o + k_1 s_1}{\bar{k}_o + \bar{k}_1} + \frac{k_o^* s_o^* + k_1^* s_1^*}{\bar{k}_o^* + \bar{k}_1^*}}$$

Im Experiment hängen die Flüsse von den beiden Substratkonzentrationen s_o und s_1 ab. In den Versuchen wird nun gewöhnlich eine der beiden Variablen festgehalten; die Abhängigkeit des Flusses von der zweiten Konzentration entspricht formal der Abhängigkeit der Anfangsgeschwindigkeit von der Konzentration des Ausgangsstoffes bei einer enzymatisch katalysierten Reaktion mit Michaelis-Menten-Kinetik. Diese Abhängigkeit läßt sich daher durch Maximalfluß und Halbsättigungskonstante beschreiben. Es sollen hier die Versuchsbedingungen mit den in

der Literatur üblichen Bezeichnungen und den nach diesem Modell erwarteten Flüssen vorgestellt werden. s_o sei dabei stets die Konzentration auf der Innenseite der Membran, s_1 die auf der Außenseite.

a) $s_o = 0$ "zero - trans - entry"

$$j = - \frac{C D s_1}{K_1 + D(\frac{1}{\bar{k}_o} + \frac{1}{\bar{d}})s_1}$$

b) $s_1 = 0$ "zero - trans - exit"

$$j = \frac{C D s_o}{K_o + D(\frac{1}{\bar{k}_1} + \frac{1}{\bar{d}})s_o}$$

c) $s_1 = \infty$ "infinite - cis - entry"

$$j = - \frac{C d_c K_o}{K_o d_c(\frac{1}{\bar{k}_o} + \frac{1}{\bar{d}}) + s_o}$$

d) $s_1 = \infty$ "infinite - trans - exit"

$$j_{\rightarrow} = \frac{C D s_o}{K_o d_c(\frac{1}{\bar{k}_o} + \frac{1}{\bar{d}}) + s_o}$$

e) $s_o = \infty$ "infinite - cis - exit"

$$j = \frac{C d_c K_1}{K_1 d_c(\frac{1}{\bar{k}_1} + \frac{1}{\bar{d}}) + s_1}$$

f) $s_o = \infty$ "infinite - trans - entry"

$$j_{\leftarrow} = \frac{C D s_1}{K_1 d_c(\frac{1}{\bar{k}_1} + \frac{1}{\bar{d}}) + s_1}$$

g) $s_o/K_o = s_1/K_1 =: s/K$ "exchange diffusion"

$$j_{\leftarrow} = j_{\rightarrow} = \frac{CD\ s/K}{1 + s/K}$$

$$= \frac{CD\ s}{K + s}\ , \text{ falls } K_o = K_1$$

Bei dieser Art von trägervermitteltem Transport kann man die folgenden Phänomene beobachten:

1. Sättigung
   Der Fluß steigt nicht proportional zur Konzentrationsdifferenz an, sondern strebt bei hohen Konzentrationen einem Maximalwert zu. Bei Erhöhung der Substratkonzentration auf beiden Seiten der Membran sinkt die Permeabilität wieder bis auf 0 ab.

2. Kompetitive Inhibition
   Bei Anwesenheit einer zweiten Substanz auf derselben Seite der Membran wird der Fluß der ersten verringert, wenn beide dasselbe Transportsystem benutzen. Zum Beispiel ist für $s_o = s_o^* = 0$ und chemischer Gleichheit von s und s* :

$$j_{\leftarrow} = |j| = \frac{C\ D\ s_1}{K_1 + D(\frac{1}{k_o} + \frac{1}{d})(s_1 + s_1^*)} < |j|_{s_1^*=0}$$

3. Gegentransport
   kann außer im Spezialfall der sehr schnellen Diffusion immer beobachtet werden, wenn zwei Substanzen dasselbe Transportsystem benutzen.
   Wenn $s_1^*/K_1^* = s_o^*/K_o^*$, so ist bei Abwesenheit von s $j^* = 0$. j^* ist jedoch positiv (d.h. auch bei rein passivem Transport mit $K_o^* = K_1^*$ kann der Fluß gegen den Konzentrationsgradienten gerichtet sein), wenn (vgl.(27))

$$\frac{s_1^*}{K_1^*}(1 + \frac{D}{d_c}\frac{s_o}{K_o}) < \frac{s_o^*}{K_o^*}(1 + \frac{D}{d_c}\frac{s_1}{K_1})$$

Insbesondere beobachtet man einen Fluß auch ohne Konzentrationsgradienten. Dieser Effekt kommt durch die Sättigungseigenschaft des Trägertransportsystems zustande. Der Kompetitor behindert die Bindung des Substrats an den Carrier auf der Seite der Membran stärker, auf der er in höherer Konzentration vorhanden ist.

4. Kompetitive Beschleunigung

Die Anwesenheit einer zweiten, dasselbe Transportsystem benutzenden Substanz kann die Transportrate unter Umständen auch erhöhen.

a) Um die Abhängigkeit des unidirektionalen Flusses von links nach rechts in Abhängigkeit von der Substratkonzentration auf der anderen Seite zu bestimmen, bildet man

$$\frac{\partial j_{\rightarrow}}{\partial s_1} = \frac{C\, s_o}{DK_oK_1N^2}\left(\frac{1}{D}\left(\frac{1}{2\bar{d}_c} - \frac{1}{2\bar{d}_p} - \frac{1}{\bar{k}_o}\right) + \left(\frac{1}{\bar{d}_c}\left(\frac{1}{\bar{d}} + \frac{1}{\bar{k}_1}\right) - \frac{1}{D^2}\right)s_o\right)$$

Es kann also $\frac{\partial j_{\rightarrow}}{\partial s_1} > 0$ sein.

Insbesondere gilt für den Fall schneller Reaktionen am Rand

$$\frac{\partial j_{\rightarrow}}{\partial s_1} = \frac{C\, s_o}{2d_pK_oK_1N^2}\left(\frac{1}{\bar{d}_p} + \left(\frac{2}{\bar{d}_p} + \frac{1}{\bar{d}_c}\right)s_o\right)\left(\frac{1}{\bar{d}_c} - \frac{1}{\bar{d}_p}\right)$$

In diesem Fall wird der unidirektionale Fluß durch die Konzentration s_1 auf der anderen Seite der Membran erhöht, falls $d_p > d_c$; er wird vermindert, wenn $d_p < d_c$. Die Beschleunigung bei höherer Diffusionsrate des beladenen Carriers läßt sich dadurch erklären, daß durch Anwesenheit von Substrat auf der anderen Seite der Rückfluß des Carriers beschleunigt wird.

Diese Art der kompetitiven Beschleunigung kommt nur

in Transportsystemen vor, in denen der unbeladene Carrier langsamer diffundiert als der beladene.

b) Equilibriert man das System mit s ($s_o/K_o=s_1/K_1=:s/K$) und fügt den Kompetitor s* hinzu, so ist der Fluß

$$j^* = -\frac{CD^*}{N}(1+\frac{D}{d_c}\frac{s}{K})(s_1^*/K_1^* - s_o^*/K_o^*) \quad \text{mit}$$

$$N = (1+\frac{s}{K})(1+\frac{Ds}{d_c K}) + D^*\frac{k_o^* s_o^* + k_1^* s_1^*}{\bar{k}_o^* \bar{k}_1^*} + \frac{D^*}{\bar{d}^*}(\frac{s_o^*}{K_o^*}+\frac{s_1^*}{K_1^*}) + \frac{D^*}{d_c}\frac{s_o^* s_1^*}{K_o^* K_1^*}$$

$$+ \frac{DD^*}{d_c}\frac{s}{K}((\frac{1}{2d_p}+\frac{1}{2d_p^*}+\frac{1}{\bar{k}_o}+\frac{1}{\bar{k}_1^*})\frac{s_o^*}{K_o^*}+(\frac{1}{2d_p}+\frac{1}{2d_p^*}+\frac{1}{\bar{k}_o^*}+\frac{1}{\bar{k}_1})\frac{s_1^*}{K_1^*})$$

Dann ist

$$\frac{\partial|j^*|}{\partial(s/K)} = \frac{CD^*}{N^2}(\frac{s_1^*}{K_1^*}-\frac{s_o^*}{K_o^*})(\frac{DD^*}{d_c}(\frac{1}{d_c}\frac{s_o^* s_1^*}{K_o^* K_1^*}-\frac{1}{\bar{k}_o}\frac{s_o^*}{K_o^*}-\frac{1}{\bar{k}_1}\frac{s_1^*}{K_1^*})-(1+\frac{D}{d_c}\frac{s}{K})^2)$$

und man sieht, daß der Fluß bei steigender Konzentration des Kompetitors zunimmt, falls

$$\frac{s_o^*}{K_o^*}\frac{s_1^*}{K_1^*} > \frac{d_c}{\bar{k}_o}\frac{s_o^*}{K_o^*}+\frac{d_c}{\bar{k}_1}\frac{s_1^*}{K_1^*}+\frac{d_c^2}{DD^*}(1+\frac{D}{d_c}\frac{s}{K})^2 .$$

Der Fluß ist größer als der Fluß für s=0, falls

$$\frac{s_o^*}{K_o^*}\frac{s_1^*}{K_1^*} > \frac{d_c}{\bar{k}_o}\frac{s_o^*}{K_o^*}+\frac{d_c}{\bar{k}_1}\frac{s_1^*}{K_1^*}+\frac{d_c^2}{DD^*}(1+\frac{D}{d_c}\frac{s}{K}) .$$

Diese Art der kompetitiven Beschleunigung kann bei geeigneten Konzentrationen s, s_o^*, s_1^* in jedem dieser Carriertransportsysteme beobachtet werden, abgesehen von dem Spezialfall sehr großer Diffusionsraten. Im Spezialfall sehr großer Reaktionsraten lauten die entsprechenden Bedingungen

$$\frac{s_o^*}{K_o^*}\frac{s_1^*}{K_1^*} > \frac{d_c^2}{DD^*}(1+\frac{D}{d_c}\frac{s}{K})^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{s_o^*}{K_o^*}\frac{s_1^*}{K_1^*} > \frac{d_c^2}{DD^*}(1+\frac{D}{d_c}\frac{s}{K}).$$

Wenn die Diffusion des Carriers über die Membran nicht so schnell erfolgt, daß man die zeitliche Entwicklung vernachlässigen kann, so ist ein adäquates Modell gemäß (15) gegeben durch

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_c \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \qquad -D_c \frac{\partial c}{\partial x}(0,t) = D_p \frac{\partial p}{\partial x}(0,t) = k_1 p(0,t) - k_o s_o c(0,t)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \qquad D_c \frac{\partial c}{\partial x}(1,t) = -D_p \frac{\partial p}{\partial x}(1,t) = k_1 p(1,t) - k_1 s_1 c(1,t)$$

wenn das Substrat nicht selbst in die Membran eindringen kann und der Carrier diese nicht verlassen kann. Durch Addition der Randbedingungen sieht man nämlich, daß für den Gesamtcarrier eine no-flux Bedingung gilt:

$$D_c \frac{\partial c}{\partial x}(0,t) + D_p \frac{\partial p}{\partial x}(0,t) = D_c \frac{\partial c}{\partial x}(1,t) + D_p \frac{\partial p}{\partial x}(1,t) = 0$$

Im stationären Zustand sind c und p lineare Funktionen von x, daher kann alles durch die Konzentrationen am Rand beschrieben werden, und die Ergebnisse sind dieselben wie beim einfachen Modell.

Nun bleibt der Fall zu betrachten, daß die transportierte Substanz ebenfalls in die Membran eindringen und dort diffundieren kann. Eine Reaktion mit dem Carrier kann dann auch innerhalb der Membran stattfinden. Diesen Vorgang wird man dann durch ein System von Reaktions-Diffusions-Gleichungen beschreiben, etwa (vgl. (9))

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= D_s \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \bar{k}p - ksc \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= D_c \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \bar{k}p - ksc \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \bar{k}p + ksc \end{aligned} \tag{36}$$

mit den Randbedingungen (vgl. (11) und (15))

$$s(0,t) = \alpha_o s_o \qquad s(1,t) = \alpha_1 s_1$$

(37)
$$-D_c \frac{\partial c}{\partial x}(0,t) = D_p \frac{\partial p}{\partial x}(0,t) = \bar{a}_o p(0,t) - a_o s_o c(0,t)$$
$$D_c \frac{\partial c}{\partial x}(1,t) = -D_p \frac{\partial p}{\partial x}(1,t) = \bar{a}_1 p(1,t) - a_1 s_1 c(1,t)$$

Berücksichtigt man schließlich, daß s sich auch in der Randschicht mit dem Carrier verbinden kann, so erscheint es sinnvoll, die folgenden Randbedingungen zu betrachten

(38)
$$-D_c \frac{\partial c}{\partial x}(0,t) = D_p \frac{\partial p}{\partial x}(0,t) = \bar{a}p(0,t) - as_o c(0,t) - \tilde{a}s(0,t)c(0,t)$$
$$-D_s \frac{\partial s}{\partial x}(0,t) = \bar{a}p(0,t) - \tilde{a}s(0,t)c(0,t) + b(\alpha s_o - s(0,t))$$

oder $s(0,t) = \alpha s_o$

entsprechend am anderen Rand

Die Reaktionsraten im Innern und am Rand sind im allgemeinen wesentlich verschieden, da die Reaktionen unter unterschiedlichen Bedingungen ablaufen.

Modelle dieser Form sollen in Kapitel II und III ausführlich behandelt werden. Dabei soll auch berücksichtigt werden, daß im allgemeinen der Reaktionsterm auch anders aussehen kann; bis jetzt wurde von der einfachsten denkbaren Reaktion zwischen zwei Substanzen ausgegangen, bei der es aufgrund des Zusammenstoßes zweier Moleküle zu der Verbindung kommt, während die Rückreaktion ein einfacher Zerfallsprozeß ist. Es können aber auch mehrere Moleküle an der Verbindung beteiligt sein, die Reaktionen können in mehreren Schritten ablaufen oder durch vorhandene Enzyme katalysiert werden.

Wenn die Reaktionen am Rand keine allzu große Rolle spielen, können die beiden letzten Randbedingungen durch no-flux-Bedingungen ersetzt werden

(39)
$$\frac{\partial c}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial c}{\partial x}(1,t) = \frac{\partial p}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial p}{\partial x}(1,t) = 0$$
$$s(0,t) = \alpha_o s_o \qquad s(1,t) = \alpha_1 s_1$$

Dieses letzte Modell (36) mit den Randbedingungen (39) wird ausführlich im folgenden Kapitel II behandelt. Bei allen Modellen ist die mittlere Konzentration des Carriers $C = \frac{1}{l}\int_0^l (c(x,t)+p(x,t))dx$ zeitlich konstant; dies entspricht der Annahme, daß die Trägermoleküle die Membran nicht verlassen können. C ist daher durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

Außer den beweglichen Trägern können auch Poren oder Kanäle den Transport erleichtern. Es sollen hier einige Modelle vorgestellt werden, die alle von einer Gesamtzahl C funktionsfähiger Kanäle ausgehen, Porenfluktuationen also nicht berücksichtigen.
Für den Transport eines Substrats s mit den Konzentrationen s_o und s_1 auf den beiden Seiten der Membran sind an den Rändern Bindungs- bzw. Dissoziationsschritte erforderlich, und im Innern der Pore soll die Substanz frei diffundieren können. Ist p(x) die Konzentration der Poren, die an der Stelle x ein Substratmolekül enthalten, so kann das Modell durch das folgende Randwertproblem beschrieben werden:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(0,t) - d\frac{\partial p}{\partial x}(0,t) = -\bar{k}_o p(0,t) + k_o s_o (C-p(0,t))$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(l,t) + d\frac{\partial p}{\partial x}(l,t) = -\bar{k}_1 p(l,t) + k_1 s_1 (C-p(l,t))$$

Dies ist ein Spezialfall des ersten nicht-stationären Carrier-Diffusionsmodells, wenn man dort annimmt, daß beladener und unbeladener Carrier sich gleich schnell bewegen können und am Anfang bereits c(x,0)+p(x,0) räumlich konstant ist.
Im stationären Zustand sind die Flüsse

$$j = -\frac{DC}{d}\,\frac{s_1/K_1 - s_o/K_o}{\frac{1}{\bar{k}_o} + \frac{1}{\bar{k}_1} + \frac{k_o s_o + k_1 s_1}{\bar{k}_o \bar{k}_1} + \frac{1}{d}(1+\frac{s_1}{K_1})(1+\frac{s_o}{K_o})}\,, \quad K_i = \frac{\bar{k}_i}{k_i}$$

$$= - \frac{D\,C}{l} \left(\frac{s_1/K_1}{1 + s_1/K_1} - \frac{s_o/K_o}{1 + s_o/K_o} \right) \qquad \text{falls } d = 0$$

$$j_{\leftarrow} = \frac{D\,C}{l} \frac{s_1/K_1}{1 + s_1/K_1} \quad , \quad j_{\rightarrow} = \frac{D\,C}{l} \frac{s_o/K_o}{1 + s_o/K_o} \qquad \text{falls } d = 0$$

Bei der Kompetition mehrerer Substanzen beobachtet man Gegentransport wie im Carriermodell.
Natürlich kann man auch hier die Diffusion wieder deuten als "Überspringen" einer Sequenz von Energiebarrieren. Wenn man allerdings annimmt, daß die Bindungsstellen höchstens einfach besetzt sind und daß ferner (in einer genügend engen Pore) nirgends zwei Moleküle aneinander vorbeikommen, so kann man diesen Vorgang nicht mehr durch Diffusion beschreiben, da sich die Teilchen nicht unabhängig voneinander bewegen können. Derartige Mechanismen heißen "Single-file"-Diffusion [25]. Jede Pore hat einen momentanen Besetzungszustand, und die Zustände sind durch Übergangswahrscheinlichkeiten miteinander verbunden. Es sind aber nicht alle Übergänge möglich, sondern es gibt "Auswahlregeln". Heckmann [25] nimmt an, daß in einer Pore nur ein Teilchen zur Zeit seine Position verändern darf, andere Autoren gehen von einem "knock-on"-Mechanismus aus, bei dem sich eine ganze Reihe von Teilchen auf benachbarten Bindungsstellen geschlossen über die Pore bewegen kann. Damit kann das in I.2 beschriebene Experiment von Hodgkin und Keynes [31] erklärt werden; der Exponent n ist dann die mittlere Anzahl der Bindungsstellen pro Pore.

II. Ein Diffusions-Reaktionsmodell für den erleichterten Transport durch Membranen

II.1 Einleitung

In diesem Kapitel soll eins der Modelle aus Kapitel I auf die Existenz von Lösungen und deren qualitatives Verhalten untersucht werden.

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial t} &= D_s \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \bar{k}p - ksc \qquad s(0,t)=s_0,\ s(1,t)=s_1\\
\frac{\partial c}{\partial t} &= D_c \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \bar{k}p - ksc \qquad c'(0,t)=c'(1,t)=0\\
\frac{\partial p}{\partial t} &= D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \bar{k}p + ksc \qquad p'(0,t)=p'(1,t)=0
\end{aligned}
$$

Dieses Modell ist identisch mit (I.36,I.39) und beschreibt (zusammen mit entsprechenden Anfangsbedingungen) einen trägervermittelten erleichterten Transport durch eine ebene und homogene Membran.
Dieses System ist bereits aus der Literatur als ein Modell für erleichterten Transport bekannt. Es wurde schon 1952 von Widdas für den Zuckertransport in rote Blutzellen vorgeschlagen [77]. Später wurde es vor allem benutzt zur Erklärung von Experimenten von Wittenberg [80], Scholander [63] und Mochizuki und Forster [46] zum Sauerstoff- und Kohlenmonoxidtransport durch Hämoglobin- und Myoglobinlösungen.
Ward beschreibt mit diesem Modell den Transport von Stickstoffmonoxid durch eine Lösung, die zweiwertige Eisenionen enthält [73].
Die Untersuchungen des Gleichungssystems (1) beschränkten sich in diesem Zusammenhang stets auf den stationä-

ren Fall. Dabei interessiert vor allem die Abhängigkeit des Flusses von den Träger- und Substratkonzentrationen, da der Fluß gemessen werden kann. Ferner gehen diese Untersuchungen davon aus, daß die Diffusionskonstanten für den beladenen und den unbeladenen Carrier gleich sind, also $D_c=D_p$. Diese Annahme ist gerade im Fall des Sauerstofftransports auch gerechtfertigt, da das Trägermolekül (Hämoglobin oder Myoglobin)sehr viel größer als das Substratmolekül ist. Die Diffusionsrate ist dafür merklich konzentrationsabhängig [57]. Wenn man das jedoch vernachlässigt, führt die Annahme $D_c=D_p$ zu einer wesentlichen Vereinfachung des Systems, denn durch Addition und Integration kann man dann c und p eliminieren und das System auf eine Gleichung für s reduzieren, die nur noch die drei Parameter

$$\varepsilon = D_c/(ks_1l^2) \ , \ \alpha = \bar{k}/(ks_1) \ , \ \beta = D_cC/(D_s s_1)$$

$$(\ C = \int_o^1 (c(x)+p(x))dx \ /l \quad \text{"Carrierdichte"})$$

enthält [82]:

$$\bar{s}'' = \beta\bar{s} + (\bar{s}+\alpha)(\bar{s}-a+j\bar{x}) \tag{2}$$

$$\bar{s}(0) = s_o/s_1 \ , \ \bar{s}(1) = 1 \ , \ \bar{s}'(0)=\bar{s}'(1)=-j$$

(a und j werden aus den zusätzlichen Randbedingungen bestimmt.)

Wenn der Carrier sehr langsam diffundiert, so ist $\varepsilon << 1$, und Murray gelangte mit singulärer Störungstheorie zu einer Näherung nullter Ordnung für den Fluß [47]:

$$j = -\left(\frac{D_s}{l}(s_1-s_o) + D_cC\left(\frac{s_1}{s_1+\bar{k}/k} - \frac{s_o}{s_o+\bar{k}/k}\right)\right)$$

Der erste Summand beschreibt den Diffusionsanteil des Flusses und der zweite ist identisch mit der Formel für den trägervermittelten Transport durch eine "dünne"

Membran im Spezialfall sehr großer Reaktionsraten und gleicher Diffusionsraten (I.33, siehe auch [77]).
Das Sauerstoff-Hämoglobin-System wurde dadurch gut beschrieben, nicht aber die Experimente mit Sauerstoff und Myoglobin, Kohlenmonoxid mit Hämoglobin und Kohlenmonoxid mit Myoglobin, wo der beobachtete Fluß wesentlich kleiner ist als der nach diesen Berechnungen erwartete. Die Erklärung liegt darin, daß in diesen Fällen auch der Parameter α sehr klein ist, das heißt die Affinität der beteiligten Reaktanden ist groß [64]. Dadurch sind die Voraussetzungen für diese asymptotische Entwicklung in ε nicht mehr erfüllt. Es wurden daher später auch andere asymptotische Entwicklungen durchgeführt, in denen zusätzlich höhere Ordnungen berücksichtigt wurden [48], [62], [50].
Das Modell wurde mehrfach numerisch simuliert mit den entsprechenden Parametern aus den vier Situationen [41], [39], [34], [38], [37], [50]. In allen Fällen liegt der erleichterte Transport höchstens in derselben Größenordnung wie der Diffusionsanteil. Im Extremfall wurde eine Erhöhung des Sauerstofftransports bis zum Achtfachen beobachtet [63], im Bereich physiologischer Konzentrationen ist sie jedoch wesentlich geringer. Dies ist auch nicht verwunderlich, denn in den gegebenen experimentellen Situationen ist die Beweglichkeit der Moleküle O_2 und CO wesentlich größer als die der großen Proteine Hämoglobin und Myoglobin.
Eine Verstärkung des Flusses um Größenordnungen ist aber möglich, wenn D_s sehr klein ist und der Carrier wesentlich schneller diffundieren kann. Im Gegensatz zu den genannten Untersuchungen wird in dieser Arbeit ein singulärer Störungsasatz verfolgt, in dem die Diffusionsrate der transportierten Substanz sehr klein ist. Dabei wird nicht vorausgesetzt, daß beladener und un-

beladener Carrier gleich schnell diffundieren.
In dieser Arbeit wird nicht nur das stationäre System, sondern auch die Evolutionsgleichung (1) untersucht. In Abschnitt 2 und 3 wird gezeigt, daß zu beliebigen nichtnegativen Anfangsbedingungen Lösungen von (1) global existieren und beschränkt sind. Abschnitt 4 beschäftigt sich mit der stationären Gleichung: Zu jeder vorgegebenen nichtnegativen Konstante C ("mittlere Carrierdichte") gibt es genau eine nichtnegative stationäre Lösung von (1) mit $C = \frac{1}{1} \int_0^1 (c(x)+p(x))dx$.
Die numerischen Simulationen in Abschnitt 7 sprechen dafür, daß die stationären Lösungen stabil sind; dies konnte jedoch nur bestimmte Parameterbereiche nachgewiesen werden (Abschnitt 6).
In Kapitel III werden die Reaktionsterme und die Randbedingungen verallgemeinert sowie der Fall höherer Raumdimensionen behandelt. In den Fällen, in denen sich die Beweise für das Modellsystem (1) direkt übertragen lassen, sollen sie aber schon in diesem Kapitel allgemein formuliert werden.

Bezeichnungen und Vereinbarungen

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ (die genauen Voraussetzungen werden später spezifiziert).

Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$L^p(\Omega) = \left\{ u:\Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ meßbar und } \|u\|_p := \left(\int |u|^p dx\right)^{1/p} < \infty \right\}$$

und

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u:\Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ meßbar und } \|u\|_\infty := \sup \operatorname{ess}\{|u(x)| \mid x \in \Omega\} < \infty \right\}$$

Die Sobolevräume $H^{n,p}(\Omega)$ bestehen aus den Funktionen $u \in L^p(\Omega)$, die verallgemeinerte Ableitungen bis zur n-ten Ordnung besitzen, die wiederum alle in $L^p(\Omega)$ liegen. Sie sind mit der Norm

$$\|u\|_{n,p} = \sum_{|i| \leq n} \|D_i u\|_p$$

oder einer dazu äquivalenten Norm versehen. Dabei ist

$$i = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}_o^m, \quad |i| := \sum_{j=1}^{m} i_j \quad \text{und}$$

$$D_i u := \frac{\partial^{|i|} u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_m^{i_m}} .$$

Folgende Abkürzungen werden verwendet:

$$\Delta u(x,t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t) \quad (= u''(x,t) \text{ falls } m=1)$$

$$\nabla u(x,t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_m} \right)(x,t)$$

$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)$ ist die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen in einem Punkt $x \in \Omega$ zur Zeit t (oder bei einem beliebigen elliptischen Differentialoperator in der äußeren konormalen Richtung).

$$\dot{u}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

Weiter sei

$C(\overline{\Omega})$ der Banachraum der stetigen Funktionen auf $\overline{\Omega}$ mit der Norm $\|u\| := \|u\|_\infty$

$C^n(\overline{\Omega})$ der Banachraum der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\overline{\Omega}$ mit der Norm
$\|u\| := \sum_{|i|\leq n} \|D_i u\|_\infty$

$C^\alpha(\overline{\Omega})$ $(\alpha\in(0,1])$ der Banachraum der α- hölderstetigen Funktionen mit der Norm

$$|u|_\alpha := \|u\|_\infty + \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

$$C^{n+\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^n(\overline{\Omega}) \mid D_i u \in C^\alpha(\overline{\Omega}) \text{ für } |i| = n \right\}$$

Räume vektorwertiger Funktionen werden in der folgenden Weise bezeichnet:

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) = \prod_{i=1}^{N} L^p(\Omega)$$

$$H^{n,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) = \prod H^{n,p}(\Omega)$$

$$C^{n+\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) = \prod C^{n+\alpha}(\overline{\Omega})$$

jeweils versehen mit der Norm $\|u\| = \sum_{i=1}^{N} \|u_i\|$ oder einer äquivalenten Norm.

Wenn aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, daß vektorwertige Funktionen gemeint sind, werden diese Bezeichnungen auch mit $L^p(\Omega)$, $H^{n,p}(\Omega)$, $C^{n+\alpha}(\overline{\Omega})$ abgekürzt.

Weitere Vereinbarungen werden in den einzelnen Abschnitten getroffen.

Buchstaben werden meistens in der folgenden Weise verwendet:

E	Banachraum
m	Raumdimension
Ω	beschränktes Gebiet $\subset \mathbb{R}^m$
$\partial\Omega$	Rand
N	Dimension des Bildraumes
l	Intervallänge ($m=1 \Rightarrow \Omega = (0,1)$)
i,j,k	$\in \mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
α,β,γ	nichtganzzahlige Exponenten (z.B. Hölderexponenten)
p,q,r	Exponenten der Lebesgue-Normen
u,v,w	skalar- oder vektorwertige Funktionen auf Ω oder $\Omega \times (0,T)$
x,y,ξ	Ortsvariable
t,τ,σ,T	Zeitvariable
s,c,p	Konzentrationen in einem chemischen System
$k,\bar{k}$	Reaktionskonstanten
D	Diffusionskonstante
L	parabolischer Operator
A	elliptischer Operator, Erzeuger einer analytischen Halbgruppe
a_{ij}, b_i, c	Koeffizienten eines elliptischen Operators der Ordnung 2
$\frac{\partial}{\partial n}$	Ableitung in der äußeren konormalen Richtung auf $\partial\Omega$
Γ	Fundamentallösung zu einem parabolischen Operator
G	Greensche Funktion
f,F	Inhomogenität in einer linearen oder Nichtlinearität in einer semilinearen elliptischen oder parabolischen Differentialgleichung
g,h	Inhomogenität in einer Randbedingung

II.2 Lokale Existenz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ($\partial\Omega$ sei etwa eine C^2- Mannigfaltigkeit). In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß Lösungen der Anfangs-Randwertaufgabe

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\dot{s} &= D_s\Delta s + f_1(s,c,p)\\
\dot{c} &= D_c\Delta c + f_2(s,c,p) \qquad \text{auf } \Omega\times(0,T)\\
\dot{p} &= D_p\Delta p + f_3(s,c,p)\\
s &= s_o(x),\ \frac{\partial c}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\times(0,T)\\
s(x,0)&=s_o(x),\ c(x,0)=c_o(x),\ p(x,0)=p_o(x) \quad \text{auf } \Omega
\end{aligned}
$$

für kleine T existieren.
Sei s_o stetig auf $\partial\Omega$ und s^o auf Ω als die Lösung des Dirichletproblems $\Delta s = 0$, $s|_{\partial\Omega} = s_o$ definiert. Mit $\bar{s} := s-s^o$ ist (1) äquivalent zu

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\dot{\bar{s}} &= D_s\Delta\bar{s} + f_1(\bar{s}+s^o,c,p)\\
\dot{c} &= D_c\Delta c + f_2(\bar{s}+s^o,c,p) \qquad \text{auf } \Omega\times(0,T)\\
\dot{p} &= D_p\Delta p + f_3(\bar{s}+s^o,c,p)\\
\bar{s} &= 0,\ \frac{\partial c}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\times(0,T)\\
\bar{s}(x,0) &= s_o(x) - s^o(x),\ c(x,0) = c_o(x),\\
&\qquad p(x,0) = p_o(x) \quad \text{auf } \Omega
\end{aligned}
$$

Dies ist ein Spezialfall des folgenden Anfangs-Randwertproblems:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&u:\ \bar{\Omega}\times[0,T) \to \mathbb{R}^N\\
&\dot{u} = \bar{A}u + \bar{f}(x,t,u) \qquad \text{auf } \Omega\times(0,T)\\
&Bu \equiv \lambda\frac{\partial u}{\partial n} + (1-\lambda)bu = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\times(0,T)\\
&u(x,0) = u_o \qquad \text{auf } \Omega
\end{aligned}
$$

Dabei ist $\bar{A} = \operatorname{diag}(\bar{A}_1,..,\bar{A}_N)$ eine Diagonalmatrix aus stark elliptischen Differentialoperatoren

der Ordnung 2 mit konstanten Koeffizienten, $b \geq 0$, $\lambda \in [0,1]^N$. B beschreibt dann erste, zweite oder dritte Randbedingungen. Durch die Lösungen des linearen Problems (d.h. $f \equiv 0$ in (3)) wird für $1<p<\infty$ auf $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ eine analytische Halbgruppe $\{ e^{At} \mid t \geq 0 \}$ mit Generator A erzeugt (Theorem I.19.4 in [17]). Dies bedeutet nun insbesondere: Für alle $u \in L^p(\Omega)$ ist die Abbildung

$[0,\infty) \to L^p(\Omega)$

$t \to e^{At}u$ stetig, und sie ist differenzierbar für $t>0$, wobei $\frac{d}{dt}(e^{At}u) = Ae^{At}u$.

A ist dicht definiert, und der Definitionsbereich D(A) ist im Sobolevraum $H^{2,p}(\Omega)$ enthalten. Die Norm auf D(A) (die Graphennorm) ist äquivalent zur Sobolevnorm (I.19 in [17]).

Für $p>m$ ist $H^{2,p}(\Omega)$ stetig in $C^1(\overline{\Omega})$ eingebettet [1]. Da $e^{At}u \in D(A^n)$ für alle $t>0$ und $n \in \mathbb{N}$ (Theorem II,2.2 in [17]), folgt aus Theorem I.19.5 in [17], daß $u \in H^{n,p}(\Omega_0)$ für Gebiete Ω_0, deren Abschluß in Ω liegt. Aus den Sobolevschen Einbettungssätzen [1] erkennt man daher, daß $e^{At}u$ für $t>0$ im Innern von Ω beliebig oft differenzierbar ist. $\bar{A}e^{At}u$ und $Be^{At}u$ existieren also für alle $t>0$ klassisch.

Weil $H^{2,p}(\Omega)$ für $p>m/2$ stetig in $C(\overline{\Omega})$ eingebettet ist, gilt $e^{At}(L^p(\Omega)) \subset C(\overline{\Omega})$ für $t>0$, insbesondere $e^{At}(C(\overline{\Omega})) \subset C(\overline{\Omega})$ und $e^{At}(L^\infty(\Omega)) \subset L^\infty(\Omega)$. A erzeugt demnach auch Halbgruppen auf $L^\infty(\Omega)$ und $C(\overline{\Omega})$, die aber nicht notwendig stark stetig sind, denn D(A) muß in $L^\infty(\Omega)$ und $C(\overline{\Omega})$ nicht dicht liegen.

Durch Addition einer Konstanten zu $\bar{A}$ kann man stets erreichen, daß das Spektrum von A in der linken Halbebene liegt und daß A das Maximumprinzip erfüllt. OBdA gelte daher $\|e^{At}\|_p \leq Me^{-\mu t}$, $\|e^{At}\|_\infty \leq 1$ für alle $t \geq 0$.

Da A eine analytische Halbgruppe auf L^p erzeugt, kann man in diesem Falle gebrochene Potenzen von -A definie-

ren [17], für die gilt

$\|(-A)^{\alpha}e^{At}\|_p \leq M(\alpha)t^{-\alpha}e^{-\mu t}$ beziehungsweise

$\|e^{At}u\|_{D((-A)^{\alpha})} \leq M(\alpha)t^{-\alpha}e^{-\mu t}\|u\|_p$

Diese Abschätzung gilt insbesondere auch für $\alpha\in\mathbb{N}$. Damit läßt sich zeigen, daß für $u\in L^p$ $(p>\frac{m}{2})$ die Abbildung

$[0,\infty) \to L^{\infty}(\Omega)$

$t \to e^{At}u$ in jedem $t>0$ stetig ist, da

$$\begin{aligned}\|(e^{At}-e^{At_o})u\|_{\infty} &\leq \text{const } \|(e^{A(t-t_o)} - I)e^{At_o}u\|_{D(A)} \\ &\leq \text{const } t_o^{-1} \|(e^{A(t-t_o)} - I)u\|_p \\ &\to 0 \quad \text{für } t\to t_o \text{, da die Halbgruppe stark stetig auf } L^p \text{ ist.}\end{aligned}$$

Falls $p>m$ ist, erkennt man entsprechend aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}&\|(e^{At} - e^{At_o} - (t-t_o)Ae^{At_o})u\|_{\infty} \\ &\quad = \|\int_o^{t-t_o} (e^{A\tau}-1)Ae^{At_o}u\, d\tau\|_{\infty} \\ &\quad \leq \text{const } (t-t_o)t_o^{-2} \sup\{\|e^{A\tau}u-u\|_p \mid 0<\tau<t-t_o\} \\ &\quad = o(t-t_o) \text{ ,}\end{aligned}$$

daß diese Abbildung in $t_o>0$ differenzierbar ist mit $\frac{d}{dt}e^{At}u = Ae^{At}u$.

Im folgenden sei stets $\max(1,m/2) < p < \infty$ vorausgesetzt.

2.1 Definition

Unter einer p-Lösung von (3) beziehungsweise

(4) $\dot{u} = Au + f(t,u)$, $u(0) = u_o$

werde eine stetige Abbildung $u:[0,T)\to L^p(\Omega)$ verstanden mit $u(0)=u_o$ und $u((0,T))\subset D(A)$, die auf $(0,T)$ differenzierbar ist und $\dot{u}(t) = Au(t) + f(t,u(t))$ erfüllt.

Dabei sei $f(t,v)\colon \Omega \to L^p(\Omega)$ definiert durch $f(t,v)(x) := \bar{f}(x,t,v)$.

Ziel ist es nun, Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Lösung nachzuweisen. Dazu müssen Bedingungen an f gestellt werden.
Wäre f eine (lokal) lipschitzstetige Funktion von $L^p(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$, so könnte man durch die übliche Picard-Iteration lokale Existenz und Eindeutigkeit für alle $u_o \in L^p(\Omega)$ nachweisen. Diese Bedingung wird jedoch schon von einfachen Nichtlinearitäten wie etwa $f(u)=u^2$ oder solchen, wie sie in den chemischen Reaktionsgleichungen auftauchen, nicht erfüllt.
Stattdessen sollen an $\bar{f}$ Anforderungen gestellt werden, die unter anderem die Lipschitzstetigkeit von f als Abbildung $f(t,.) : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ beziehungsweise $f(t,.) : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ garantieren.

(5) $\bar{f} : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ sei stetig, hölderstetig in den beiden ersten Variablen und lipschitzstetig in der dritten Variablen, gleichmäßig in dem folgenden Sinne: $\exists \alpha \in (0,\frac{1}{2}]$ $\forall R>0$ $\exists \rho(R)>0$, so daß
$|\bar{f}(x,t,u)| \leq \rho(R)$ und
$|\bar{f}(x,t,u) - \bar{f}(y,s,v)| \leq \rho(R)(|u-v|+|t-s|^\alpha+|x-y|^{2\alpha})$
für alle $x,y\in\Omega, s,t>0, u,v\in \mathbb{R}^N$ mit $|u|,|v| \leq R$.

Diese Bedingung soll im folgenden stets vorausgesetzt werden. Damit kann immerhin bewiesen werden, daß Lösungen der Anfangswertprobleme (4) für Anfangsfunktionen $u_o \in L^\infty$ existieren. Zunächst soll die Integralgleichung

(6) $u = e^{At}u_o + \int_o^t e^{A(t-s)} f(s,u)ds$

untersucht werden.

2.2 Definition

$u : [0,T) \to L^p(\Omega)$ heißt p-Lösung von (6), wenn u meßbar ist, $u(t) \in L^\infty(\Omega)$ $\forall t>0$ und falls

$$u(t) = e^{At}u_o + \int_o^t e^{A(t-s)}f(s,u(s))ds \quad \text{für alle } t>0$$

erfüllt ist.

Wir brauchen das

2.3 Lemma von Gronwall

Sei $T \in (0,\infty]$ und $u : [0,T) \to \mathbb{R}_+$ eine meßbare Funktion mit $u(t) \leq u_o + \int_o^t Mu(s)ds$ $\forall t\in[0,T)$.
Dann läßt sich u abschätzen durch $u(t) \leq u_o e^{Mt}$ $\forall t$.

Später wird in III.1 eine Verallgemeinerung bewiesen.

2.4 Lemma

Sei $\frac{m}{2} < p < \infty$. Wenn f beziehungsweise $\overline{f}$ die Voraussetzungen (5) erfüllt und u_o in $L^\infty(\Omega)$ liegt, so gibt es ein $T>0$, so daß auf $[0,T)$ genau eine p-Lösung der Integralgleichung (6) existiert. Dabei kann T so gewählt werden, daß es nur über $\|u_o\|_\infty$ von der Anfangsfunktion abhängt: Für $\|u_o\|_\infty \leq r$ existiert die Lösung auf $[0,T(r))$.

Beweis: Sei $\|u_o\|_\infty \leq r$, $R := r + 1$,
$T = T(r) := \min(1,(2\rho(R))^{-1})$,

$$D_{R,T} := \{ u:[0,T) \to L^p(\Omega) \mid u \text{ stetig, } u(0)\in L^\infty(\Omega),\ u(t) \in C(\overline{\Omega}) \text{ für } t>0,\ u:(0,T)\to C(\overline{\Omega}) \text{ stetig, } \sup_{t\in[0,T)} \|u(t)\|_\infty \leq R \}$$

versehen mit der Norm $\|u\| = \sup\{\|u(t)\|_\infty \mid 0\leq t<T\}$.

Dann ist $D_{R,T}$ eine abgeschlossene Teilmenge des Ba-

nachraums der beschränkten Funktionen $[0,T) \to L^\infty(\Omega)$. Denn sei u^n eine Cauchyfolge in $D_{R,T}$, $u^n \to u:[0,T) \to L^\infty(\Omega)$. Dann ist $u^n(t) \in C(\bar{\Omega}) \forall t>0$. Da u^n gleichmäßig in t konvergiert, ist u ebenfalls stetig in $t>0$. Außerdem ist u als Abbildung in den Raum $L^p(\Omega)$ stetig in $t=0$: Zu $\varepsilon>0$ wähle man ein $n \in \mathbb{N}$ und $\delta>0$, so daß

$$\sup \{ \|u(t)-u^n(t)\|_\infty \mid 0 \le t<T \} < \varepsilon \quad \text{und}$$

$$\|u^n(t) - u^n(0)\|_p < \varepsilon \quad \text{für } t<\delta \text{ . Dann ist}$$

$$\begin{aligned} \|u(t)-u(0)\|_p &\le \|u(t)-u^n(t)\|_p + \|u^n(t)-u^n(0)\|_p \\ &\quad + \|u^n(0)-u(0)\|_p \quad \text{für } t<\delta \\ &\le (1 + 2|\Omega|^{1/p})\varepsilon. \end{aligned}$$

Eine Abbildung $F : D_{R,T} \to L^\infty([0,T),L^\infty(\Omega))$ sei durch

$$F(u)(t) := e^{At}u_o + \int_o^t e^{A(t-s)} f(s,u(s))ds \quad \text{definiert.}$$

Dann ist $F(D_{R,T}) \subset D_{R,T}$, denn:

$$\|F(u)(t)\|_\infty \le \|u_o\|_\infty + \int_o^t \rho(R)ds \le r + \rho(R)T \le r+1 = R$$

$$\begin{aligned} F(u)(t_2) - F(u)(t_1) &= e^{At_2}u_o - e^{At_1}u_o \\ &\quad + \int_o^{t_2} e^{A(t_2-s)} f(s,u(s))ds \\ &\quad - \int_o^{t_1} e^{A(t_1-s)} f(s,u(s))ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (e^{A(t_2-t_1)}-I)e^{At_1}u_o \\ &\quad + \int_o^{t_1} e^{A(t_1-s)} (f(s+t_2-t_1,u(s+t_2-t_1))-f(s,u(s))) ds \\ &\quad + \int_o^{t_2-t_1} e^{A(t_2-s)} f(s,u(s))ds \quad ; \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|F(u)(t_2) - F(u)(t_1)\|_\infty &\le \text{const } M\, t_1^{-1} \|(e^{A(t_2-t_1)}-I)u_o\|_p \\ &\quad + \int_o^{t_1} \|e^{A(t_1-s)} (f(s+t_2-t_1,u(s+t_2-t_1))-f(s,u(s)))\|_\infty ds \\ &\quad + (t_2-t_1)\rho(R) \end{aligned}$$

$$\to 0 \quad \text{für} \quad t_2 \to t_1 > 0 \quad \text{oder} \quad t_1 \to t_2 \,,$$

dabei folgt die Konvergenz für den mittleren Summanden aus der Stetigkeit der Abbildung $t \to f(t,u(t))$ und dem

Satz von der majorisierten Konvergenz:

$$\int_o^{t_1} \| e^{A(t_2-t_1)} f(s+t_2-t_1, u(s+t_2-t_1)) \|_\infty ds \leq \int_o^{t_1} \rho(R) ds \leq T\rho(R)$$

An der Stelle $t_1=0$ ist $F(u)$ als Abbildung in L^p stetig:

$$\| F(u)(t)-F(u)(0) \|_p \leq \| (e^{At}-I)u_o \|_p + \int_o^t M|\Omega|^{1/p} (R) ds$$
$$\to 0 \text{ für } t \to 0 .$$

$F(u) : (0,T) \to L^p(\Omega)$ ist sogar β-hölder-stetig $\forall \beta < 1$.

$$\begin{aligned} F(u)(t) - F(u)(t_o) &= \int_o^{t-t_o} e^{As} A e^{At_o} u_o \, ds \\ &+ \int_o^{t_o} \int_o^{t-t_o} A e^{A(\tau+t_o-s)} f(s,u(s)) d\tau ds \\ &+ \int_{t_o}^{t} e^{A(t-s)} f(s,u(s)) \, ds \\ &= \int_o^{t-t_o} e^{As} A e^{At_o} u_o \, ds \\ &- \int_o^{t_o} \int_o^{t-t_o} (-A)^{\beta} e^{A(t_o-s)} (-A)^{1-\beta} e^{A\tau} f(s,u(s)) \, d\tau ds \\ &+ \int_{t_o}^{t} e^{A(t-s)} f(s,u(s)) ds \quad ; \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| F(u)(t)-F(u)(t_o) \|_p &\leq M t_o^{-1} (t-t_o) \| u_o \|_p \\ &+ \int_o^{t_o} \int_o^{t-t_o} M^2 (t_o-s)^{-\beta} \tau^{-(1-\beta)} |\Omega|^{1/p} \rho(R) \, d\tau ds \\ &+ M(t-t_o) |\Omega|^{1/p} \rho(R) \\ &\leq \text{const } (t-t_o) + M^2 |\Omega|^{1/p} \rho(R) \frac{(t-t_o)^{\beta}}{\beta(1-\beta)} t_o^{1-\beta} \\ &\leq \text{const } (t-t_o)^{\beta} . \end{aligned}$$

Schließlich ist F eine Kontraktion, denn für $u,v \in D_{R,T}$

$$\begin{aligned} \| F(u)(t)-F(v)(t) \|_\infty &\leq \int_o^t \| e^{A(t-s)} (f(s,u(s))-f(s,v(s))) \|_\infty ds \\ &\leq \int_o^t \rho(R) \| u(s)-v(s) \|_\infty ds \\ &\leq T \rho(R) \sup \{ \| u(s)-v(s) \|_\infty \mid 0 \leq s \leq T \} \\ \| F(u)-F(v) \|_{D_{R,T}} &\leq 1/2 \| u-v \|_{D_{R,T}} . \end{aligned}$$

Es gibt daher genau einen Fixpunkt in $D_{R,T}$. Dieser ist eine Lösung der Integralgleichung (6).

2.5 Korollar

Es sei $p>m/2$ und f erfülle (5). $u \in D_{R,T}$ sei eine p-Lösung der Integralgleichung (6). Dann ist u als Abbildung $(0,T) \to L^p(\Omega)$ (lokal) hölderstetig.

Ist $u \in D_{R,T}$ hölderstetig, so ist die Abbildung

$(0,T) \to L^p(\Omega)$

$t \to f(t,u(t))$ ebenfalls hölderstetig, wie aus der folgenden Abschätzung folgt:

$$\|f(t,u(t))-f(t_o,u(t_o))\|_p \leq \rho(R)(\|u(t)-u(t_o)\|_p + |t-t_o|^{\alpha}|\Omega|^{1/p})$$

2.6 Lemma

Die Abbildung $(0,T) \to L^p(\Omega)$

$t \to f(t,u(t))$ sei lokal hölderstetig und u sei eine p-Lösung von (6).

Dann ist $u(t) \in D(A)$ für $t>0$ und u ist eine Lösung der Differentialgleichung (4).

Beweis: Es sei für $0<t_o \leq s,t<T$

$\|f(t,u(t))-f(s,u(s))\|_p \leq g(t_o)(t-s)^{\alpha}$. Für $s \in [0,t)$ ist $e^{A(t-s)}f(s,u(s)) \in D(A)$. Wegen der beiden folgenden Abschätzungen, die für $0<t_o<t_1 \leq t<T$ gelten,

$$\int_{t_o}^{t} \|Ae^{A(t-s)}(f(s,u(s))-f(t,u(t)))\|_p ds$$

$$(7) \qquad \leq \int_{t_o}^{t} (t-s)^{-1} g(t_o)(t-s)^{\alpha} ds$$

$$\leq M/\alpha g(t_o) T^{\alpha} \qquad \text{und}$$

$$\int_o^{t_o} \| Ae^{A(t-s)} f(s,u(s)) \|_p ds \leq \int_o^{t_o} (t-s)^{-1} M |\Omega|^{1/p} \rho(R) ds$$

$$\leq (t_1 - t_o)^{-1} t_o M |\Omega|^{1/p} \rho(R)$$

sind $\int_{t_o}^{t} e^{A(t-s)} (f(s,u(s)) - f(t,u(t))) ds$ und $\int_o^{t_o} e^{A(t-s)} f(s,u(s)) ds$ in $D(A)$, und es ist jeweils die Anwendung des Operators mit der Integration vertauschbar ($A\int = \int A$). Außerdem ist

$$\int_{t_o}^{t} Ae^{A(t-s)} f(t,u(t)) ds = - \int_{t_o}^{t} \frac{d}{ds} e^{A(t-s)} f(t,u(t)) ds$$

$$= (e^{A(t-t_o)} - I) f(t,u(t))$$

$$= A \int_{t_o}^{t} e^{A(t-s)} f(t,u(t)) ds \quad ,$$

so daß schließlich

$A \int_o^t e^{A(t-s)} f(s,u(s)) ds = \int_o^t Ae^{A(t-s)} f(s,u(s)) ds$ folgt.

Für $t>0$ ist auch $e^{At} u_o \in D(A)$ und damit $u(t) \in D(A)$.

Die Differenzierbarkeit von u zeigt man entsprechend mit dem Nachweis, daß die Differentiation mit der Integration vertauschbar ist. Die Differentialgleichung folgt aus

$$\frac{d}{dt} \int_o^t e^{A(t-s)} f(s,u(s)) ds = f(t,u(t)) + \int_o^t \frac{d}{dt} e^{A(t-s)} f(s,u(s)) ds$$

$$= f(t,u(t)) + A \int_o^t e^{A(t-s)} f(s,u(s)) ds$$

$$\frac{d}{dt} u(t) = \frac{d}{dt} e^{At} u_o + \frac{d}{dt} \int_o^t e^{A(t-s)} f(s,u(s)) ds$$

$$= A (e^{At} u_o + \int_o^t e^{A(t-s)} f(s,u(s)) ds) + f(t,u(t))$$

$$= Au(t) + f(t,u(t))$$

□

2.7 Korollar

f erfülle die Bedingung (5), und es sei $p > m/(2\alpha)$. $u \in D_{R,T}$ sei eine Lösung der Integralgleichung (6). Dann ist u als Abbildung in den Raum $C(\overline{\Omega})$ stetig differenzierbar in jedem $t>0$. Für $t>0$ ist $u(t) \in C^2(\overline{\Omega})$.

Beweis: Nach Korollar 5 und Lemma 6 ist $u(t) \in D(A)$ für alle $t>0$. Wählt man $\nu \in (m/p, 2\alpha]$, so ist $\nu \leq 1 \leq 2(1-\alpha) < 2-m/p$, und aus Theorem 1.6.1 in [26] folgt $u(t) \in C^{\nu}(\overline{\Omega})$ für $t>0$. Wegen $\nu \leq 2\alpha$ ist dann auch $f(t,u(t))$ in $C^{\nu}(\overline{\Omega})$. Mit $\beta \in (m/2p, \alpha/2)$ ist für $t>0$ $f(t,u(t)) \in D((-A)^{\beta})$ (vgl. Theorem I.11.1 in [84]). Nun folgt analog zu dem Beweis von Lemma 6, daß $(-A)^{\beta}u(t) \in D(A)$ für $t>0$ und die Differenzierbarkeit der Abbildung $t \to (-A)^{\beta}u(t)$, wenn man die Abschätzung (7) ersetzt durch

$$\int_{t_o}^{t} \| Ae^{A(t-s)} (f(s,u(s)) - f(t,u(t)))\|_{D((-A)^{\beta})}$$

$$\leq \text{const} \int_{t_o}^{t} (t-s)^{-(1+\beta)} \| f(s,u(s)) - f(t,u(t))\|_{p} \, ds$$

$$\leq \text{const} \int_{t_o}^{t} g(t_o)(t-s)^{-1+\alpha-\beta} \, ds$$

$$\leq \text{const}\, g(t_o)\, T^{\alpha-\beta}$$

u ist also differenzierbar als Abbildung in $D((-A)^{\beta})$. Die Behauptung ergibt sich aus der stetigen Einbettung $D((-A)^{\beta}) \subset C^{\mu}(\overline{\Omega})$ für $0<\mu<2\beta-m/p$ (Theorem 1.6.1 in [26]). ∎

2.8 Lemma

f erfülle die Bedingung (5). Dann gibt es auf jedem Intervall $[0,T)$ höchstens eine Lösung der Anfangswertaufgabe (4) zu $u_o \in L^{\infty}(\Omega)$ mit der zusätzlichen Eigenschaft $\sup\{ \|u(t)\|_{\infty} \mid 0 \leq t < T\} < \infty$. Diese ist auch eine Lösung der Integralgleichung (6).

Beweis: Wegen der Voraussetzungen (5) an $\bar{f}$ ist die Abbildung $(0,T) \to L^p(\Omega)$, $t \to f(t,u(t))$ stetig. Damit ist auch die Abbildung $s \to Ae^{A(t-s)}f(s,u(s))$ stetig für $0<s<t$. Durch Integration erhält man

$$\begin{aligned} u(t) - e^{At}u_o &= \int_o^t \frac{d}{ds} e^{A(t-s)}u(s)ds \\ &= -\int_o^t Ae^{A(t-s)}u(s)ds + \int_o^t e^{A(t-s)}\dot{u}(s)ds \\ &= \int_o^t e^{A(t-s)}f(s,u(s))ds \end{aligned}$$

Gibt es nun zwei Lösungen u und v, so folgt aus dieser Integralgleichung

$$\|u(t)-v(t)\|_p \leq \int_o^t M\rho(\max(\sup_{0\leq\tau<T}\|u(\tau)\|_\infty, \sup_{0\leq\tau<T}\|v(\tau)\|_\infty))\|u(s)-v(s)\|_p ds$$

Aus Lemma 3 folgt $\|u(t)-v(t)\|_p = 0$ für $0\leq t<T$. ∎

2.9 Bemerkung

Es wurde gezeigt, daß es zu $u_o \in L^\infty(\Omega)$, $p > m/2$ genau eine p-Lösung der Integralgleichung (6) gibt. Die Lösungen stimmen für $m/2 < p < \infty$ überein, da $C^2(\Omega)\cap L^p(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ liegt und die Differentialoperatoren auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche für verschiedene p übereinstimmen. Wie aus Korollar 7 folgt, ist diese Lösung sogar klassisch auf $\bar{\Omega}\times(0,T)$. Lediglich die Anfangsfunktion wird nur in dem Sinne $\|u(t) - u_o\|_p \to 0$ für $t\to 0$, für alle $p \in [1,\infty)$ angenommen.

2.10 Lemma

f erfülle (5), es sei $p>m/2$, $u_o \in L^p(\Omega)$ und u eine Lösung von (4) mit $\sup\{\|u(t)\|_\infty \mid 0<t\leq T\}<\infty$. Dann läßt sich u auf ein maximales Existenzintervall $[0,T_1)$ fortsetzen. Falls $T_1<\infty$, gilt $\liminf_{t\to T_1} \|u(t)\|_\infty = \infty$.

Beweis: Nach Lemma 8 ist u Lösung der Integralgleichung (6). Jede mögliche Fortsetzung ist eindeutig und ebenfalls wieder Lösung der Integralgleichung. Sei $[0,T_1)$ das maximale Existenzintervall. Wir nehmen an, daß $T_1<\infty$ und $\sup\{\|u(t_k)\|_\infty \mid k\in\mathbb{N}\} = r<\infty$ für eine Folge $t_k\to T_1$. Dann gibt es ein $q\in\mathbb{N}$, so daß $T_1-T(r) < t_q < T_1$ mit T(r) wie in Lemma 4. Nun existiert nach Lemma 4 eine Lösung der Integralgleichung zum Anfangswert $u(t_q)$ bis zur Zeit $t_q+T(r)>T_1$. Diese ist wegen Korollar 5 und Lemma 6 auch Lösung der Differentialgleichung. Die Lösung u läßt sich also über T_1 hinaus fortsetzen im Widerspruch zur Maximalität von T_1. ∎

Zusammenfassend erhält man den folgenden

2.11 Satz

f erfülle die Voraussetzungen (5), und es sei $u_o \in L^\infty(\Omega)$. Dann gibt es ein Intervall $[0,T)$, auf dem genau eine Lösung der Anfangswertaufgabe (4) mit $\sup\{\|u(t)\|_\infty \mid 0\leq t<T\} < \infty$ existiert. Die Lösung läßt sich eindeutig auf ein maximales Existenzintervall $[0,T_{max})$ fortsetzen, und es gilt $T_{max} + \liminf_{t\to T_{max}} \|u(t)\|_\infty = \infty$.

Auf $\overline{\Omega}\times(0,T_{max})$ ist u eine klassische Lösung.

II.3 Globale Existenz und Beschränktheit

Im vorigen Abschnitt über die lokale Existenz wurde gezeigt, daß für das System von parabolischen Anfangs-Randwertaufgaben

$$
(1)\qquad
\begin{array}{llll}
\dot{s} = D_s\Delta s + f_1(s,c,p) & s(x,0)=s_o(x) & s=s_o & \\
\dot{c} = D_c\Delta c + f_2(s,c,p) & c(x,0)=c_o(x) & \frac{\partial c}{\partial n}=\frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \\
\dot{p} = D_p\Delta p - f_2(s,c,p) & p(x,0)=p_o(x) & \text{auf } \partial\Omega &
\end{array}
$$

unter entsprechenden Glattheitsvoraussetzungen genau eine lokale Lösung $u = (s,c,p)$ existiert. Sie läßt sich eindeutig bis zu einer maximalen Existenzzeit T_{max} fortsetzen, die im Falle $T_{max}< \infty$ durch
$\liminf_{t\to T_{max}} \|u(.,t)\|_\infty = \infty$ charakterisiert ist. Die Lösung existiert daher global (d.h. $T_{max}= \infty$), wenn man ihre Beschränktheit auf endlichen Zeitintervallen nachweisen kann. Lokale Lösungen von (1) lassen sich im allgemeinen nicht global fortsetzen; sie können vorher "explodieren", wenn man beliebiges Wachstum von f zuläßt. Im Falle des chemischen Systems

$$
(2)\qquad
\begin{array}{llll}
\dot{s} = D_s\Delta s+\bar{k}p-ksc & s(x,0)=s_o(x) & s=s_o & \\
\dot{c} = D_c\Delta c+\bar{k}p-ksc & c(x,0)=c_o(x) & \frac{\partial c}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \\
\dot{p} = D_p\Delta p-\bar{k}p+ksc & p(x,0)=p_o(x) & \text{auf } \partial\Omega &
\end{array}
$$

kann man dagegen nicht nur zeigen, daß jede Lösung global existiert, sondern sogar, daß sie auch global beschränkt ist. Dabei geht wesentlich ein, daß die Nichtlinearität einseitig linear beschränkt ist: $\bar{k}p-ksc\leq\bar{k}p$. Im Beweis wird dabei benutzt, daß man für die Lösungen parabolischer Anfangs-Randwertaufgaben L^q-Abschätzungen aus (schwächeren) L^p-Abschätzungen für die Nichtlinearität gewinnen kann. Diese Methode wird auch von Rothe

[60] und Kielhöfer [35] verwendet. Kielhöfers Ergebnis ist für das vorliegende System zu schwach, weil es a-priori-Abschätzungen in L^p-Normen mit $p>1$ verlangt. Diese Gleichungen lassen jedoch nur eine sehr schwache a-priori-Abschätzung ($p=1$) zu.

Zunächst werde das folgende Anfangs-Randwertproblem untersucht:

$$
(3)\qquad \begin{aligned} &\dot{u} = \Delta u - au + f && \text{auf } \Omega \times (0,T) \\ &(1-\lambda)\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0,T) \\ &u(x,0) = 0 && \text{auf } \Omega \end{aligned}
$$

mit den folgenden Voraussetzungen:
$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand (C^2-Mannigfaltigkeit).

$$
(4)\qquad a \geq 0\ ,\ 0 \leq \lambda \leq 1\ ,\ a+\lambda > 0
$$

(5) $f : \overline{\Omega} \times [0,T) \to R$ sei stetig, hölderstetig in in t, gleichmäßig bezüglich $x \in \overline{\Omega}$.

Dann existiert genau eine Lösung von (3) im Sinne von Definition 2.1.
Das folgende Lemma enthält den wesentlichen Schritt von einer Abschätzung von f (die bei einer nichtlinearen Gleichung aus einer a-priori-Abschätzung gewonnen werden könnte) zu einer Abschätzung der Lösung. Die Schritte in diesem Beweis findet man bei Rothe [59] .

3.1 Lemma
Unter den Voraussetzungen (4) und (5) sei u eine Lösung von (3). Dann gibt es für alle $p,q \in [1,\infty]$ mit $1/q > 1/p - 2/m$ eine Konstante C, die nur von $m, \Omega, a, \lambda, p, q$ abhängt, so daß $\| u(.,t)\|_q \leq C \sup_{0\leq\tau\leq t} \| f(.,\tau)\|_p$ für alle $t \in [0,T)$.

Beweis: Sei zunächst $p>1$. Der Operator $\bar{A} = \Delta - a$ erzeugt mit den zugehörigen Randbedingungen eine analytische Halbgruppe $\{ e^{At} \}$ auf $L^p(\Omega)$. Die Voraussetzungen an a und λ garantieren, daß bezogen auf den Hilbertraum $L^2(\Omega)$ das (diskrete) Spektrum von A ganz auf der negativen reellen Achse liegt. Daher ist

(6) $\|e^{At}\|_2 \leq e^{-\mu t}$ für ein $\mu>0$ und alle $t\geq 0$. Die folgende Überlegung soll zeigen, daß die Halbgruppe dann auch bezüglich L^p, $1\leq p\leq\infty$ asymptotisch stabil ist: Aus dem Maximumprinzip folgt, daß e^{At} positiv ist und

(7) $\|e^{At}\|_\infty \leq 1$ für alle $t\geq 0$.

Der Satz von Riesz-Thorin (Theorem IX.17 in [56]) besagt, daß mit (6) und (7) dieselbe Abschätzung auch für L^r-Normen mit $2\leq r\leq\infty$ gilt:

(8) $\|e^{At}\|_r \leq 1$ für alle $r \in [2,\infty]$.

Für $1/2 > 1/r > 1/2 - 2/m$ folgt aus dem Sobolevschen Einbettungssatz und der Äquivalenz der Norm auf D(A) mit der Sobolevnorm:

$\|e^{At}u\|_r \leq \text{const } \|Ae^{At}u\|_2 \leq \text{const } t^{-1}e^{-\mu t}\|u\|_2$

für alle $u\in L^2$ und $t>0$. Wenn man dieses Argument unter Benutzung von (8) wiederholt und die Halbgruppeneigenschaft benutzt, so folgt

$\|e^{At}u\|_\infty \leq \text{const } t^{-n}e^{-\mu t}\|u\|_2$ für $n>m/4$. Insbesondere gilt für die konstante Funktion 1

$\|e^{At}1\|_\infty \leq \text{const } t^{-n}e^{-\mu t}$ und $\|e^{At}1\|_\infty \leq 1$ $\Rightarrow$

$\|e^{At}1\|_\infty \leq \text{const } e^{-\mu t}$. Damit ist für $u\in L^2\subset L^1$ (mit $(\ ,\ )$ werde das Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$ bezeichnet)

$\|e^{At}u\|_1 = (1,|e^{At}u|) \leq (1,e^{At}|u|) = (e^{At}1,|u|)$

$\leq \|e^{At}1\|_\infty \|u\|_1 \leq c_1 \|u\|_1 e^{-\mu t}$; $\Rightarrow$

(9) $\|e^{At}\|_1 \leq c_1 e^{-\mu t}$ da L^2 in L^1 dicht liegt.

Für $u \in L^\infty$ ist

$$\begin{aligned}\|e^{At}u\|_\infty &= \sup\{|(e^{At}u,v)| \mid \|v\|_1=1\}\\ &= \sup\{|(u,e^{At}v)| \mid \|v\|_1=1,\ v\in L^2\}\\ &\le \sup\{\|u\|_\infty \|e^{At}v\|_1 \mid \|v\|_1=1,\ v\in L^2\}\\ &\le c_1 \|u\|_\infty e^{-\mu t} \quad \text{nach (9)}\end{aligned} \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt wieder mit dem Satz von Riesz-Thorin:

$$\|e^{At}\|_p \le c_1 e^{-\mu t} \quad \text{für alle } p\in[1,\infty]\,. \tag{11}$$

Insbesondere besitzt für $1<p<\infty$ $-A$ gebrochene Potenzen $(-A)^\alpha$, $\alpha\in[0,1]$ mit

$$\|(-A)^\alpha e^{At}\|_p \le \text{const}\, t^{-\alpha} e^{-\mu t} \quad \forall t>0. \tag{12}$$

Da die Einbettung $D((-A)^\alpha) \to L^q$ für $q\in[1,\infty]$, $1/q > 1/p - 2\alpha/m$ stetig ist (Theorem 1.6.1 in [26]), folgt für $u\in L^p$

$$\begin{aligned}\|e^{At}u\|_q &\le \text{const}\, \|(-A)^\alpha e^{At}u\|_p\\ &\le \text{const}\, t^{-\alpha} e^{-\mu t} \|u\|_p\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Sei nun $p=1$ und $1\le q\le\infty$, $1/q > 1 - 2\alpha/m$, $1/q' := 1 - 1/q < 2\alpha/m$. Dann ist für $u \in L^2\cap L^q$

$$\begin{aligned}\|e^{At}u\|_q &= \sup\{|(e^{At}u,v)| \mid \|v\|_{q'}=1\}\\ &= \sup\{|(u,e^{At}v)| \mid \|v\|_{q'}=1,\ v\in L^2\}\\ &\le \sup\{\|u\|_1 \|e^{At}v\|_\infty \mid \|v\|_{q'}=1,\ v\in L^2\}\\ &\le \text{const}\ \sup\{\|u\|_1 t^{-\alpha} e^{-\mu t}\|v\|_{q'} \mid \\ &\qquad \|v\|_{q'}=1,\ v\in L^2\} \text{ nach (13)}\\ &= \text{const}\, t^{-\alpha} e^{-\mu t} \|u\|_1\end{aligned}$$

Diese Abschätzung gilt für alle $u\in L^1$, da $L^2\cap L^q$ in L^1 dicht liegt. Damit ist gezeigt, daß (13) auch für $p=1$ richtig ist.

Nach dem vorigen Abschnitt ist die Lösung des Anfangswertproblems (3) nun gegeben durch

$u(.,t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(.,s)ds$, und aus der Abschätzung (13) folgt

$$
\begin{aligned}
\|u(.,t)\|_q &\leq \int_o^t \text{const}\ (t-s)^{-\alpha} e^{-\mu(t-s)}\ \|f(.,s)\|_p ds \\
&\leq \text{const} \int_o^\infty s^{-\alpha} e^{-\mu s} ds \sup_{0\leq s\leq t} \|f(.,s)\|_p \\
&\leq \text{const} \sup_{0\leq s\leq t} \|f(.,s)\|_p
\end{aligned} \tag{14}
$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. Daß die Konstante C nur von m, Ω, a, λ, p und q abhängt, folgt aus der Konstruktion, wenn α ebenfalls so gewählt wird, daß es nur von p,q und m abhängt. ___|

3.2 Korollar

Es seien die Voraussetzungen (4) und (5) erfüllt. $u_o : \Omega \times\{0\} \cup \partial\Omega\times[0,T)$ sei beschränkt und auf $\partial\Omega\times(0,T)$ stetig. u sei eine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
&\dot{u} = \Delta u - au + f && \text{auf} \quad \Omega\times(0,T) \\
&(1-\lambda)\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda(u-u_o) = 0 && \text{auf} \quad \partial\Omega\times(0,T) \\
&u(x,0) = u_o(x) && \text{auf} \quad \Omega
\end{aligned} \tag{15}
$$

Dann gibt es für alle $p,q \in [1,\infty]$ mit $1/q > 1/p - 2/m$ eine Konstante $C(m, \Omega, a, \lambda, p, q)$, so daß $\forall t \geq 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
\|u(.,t)\|_q \leq\ & \sup\{ |u_o(x,s)| \mid s=0 \text{ oder } 0<s\leq t \wedge x\in\partial\Omega\}\ |\Omega|^{1/q} \\
&+ C \sup\{ \|f(.,s)\|_p \mid 0\leq s\leq t \}
\end{aligned}
$$

Beweis: Es ist u=v+w, wobei v die homogene Gleichung mit den vorgegebenen Anfangs- und Randdaten erfüllt und w die inhomogene Gleichung mit homogenen Anfangs- und Randwerten. Aus dem Maximumprinzip und Lemma 1 folgt die Behauptung. ___|

Für eine spätere Anwendung (Stabilität) sei hier noch festgehalten:

3.3 Korollar

Es sei $1<p<\infty$, $0<\alpha<1$, und im übrigen gelten die Voraussetzungen von Korollar 2. Dann gilt für $t>0$:

$$\|(-A)^{\alpha}u(.,t)\|_p \leq \text{const}\,((1+t^{-\alpha})\ \sup\{\,|u_o(x,s)|\ |\ s=0 \text{ oder } 0\leq s\leq t\wedge x\in\partial\Omega\,\}$$
$$+\ \sup\{\|f(.,s)\|_p\ |\ 0\leq s\leq t\,\})$$

Beweis: Alle hierzu notwendigen Schlüsse sind bereits beim Beweis des Lemmas vorgekommen. Die Behauptung folgt aus (12) und einer Modifikation der Abschätzung (14):

$$\|(-A)^{\alpha}u(.,t)\|_p \leq \int_o^t \text{const}\ (t-s)^{-\alpha}\ e^{-\tilde{\mu}(t-s)}\ \|f(.,s)\|_p\,ds$$
$$\leq \text{const}\ \ \sup\{\,\|f(.,s)\|_p\ |\ 0\leq s\leq t\,\}$$ ⌟

3.4 Korollar

Es seien die Voraussetzungen von Korollar 2 erfüllt, außerdem seien u_o und u nichtnegativ. f genüge einer einseitigen Abschätzung $f(x,t) \leq \varphi(x,t) \geq 0$. Dann gilt analog zu Korollar 2:

$$\|u(.,t)\|_q \leq \sup\{\,|u_o(x,s)|\ |\ s=0 \text{ oder } 0<s\leq t\wedge x\in\partial\Omega\,\}\ |\Omega|^{1/q}$$
$$+\ C\ \sup\{\|\varphi(.,s)\|_p\ |\ 0\leq s\leq t\}$$

Beweis: Wegen $\|u(.,t)\|_q^q = \int_\Omega u(x,t)^q dx$ reichen einseitige Abschätzungen für u. Mit der Aufspaltung $u=v+w$ wie im Beweis zu Korollar 2 ist

$$0 \leq v(.,t) + w(.,t) \leq v(.,t) + \int_o^t e^{A(t-s)}\ \varphi(.,s)ds$$

wegen der Positivität der Halbgruppe. Hieraus folgt

$$\|u(.,t)\|_q \leq \text{const}\ \sup\{\,\|\varphi(.,s)\|_p\ |0\leq s\leq t\} + \|v(.,t)\|_q$$

wie im Beweis zu Lemma 1. ⌟

Mithilfe dieses Korollars soll nun gezeigt werden, daß positive Lösungen des Reaktions-Diffusions-Gleichungssystems (2) global existieren und beschränkt sind. Der folgende Satz soll für das allgemeinere System (1) formuliert werden. Dazu müssen zwar ziemlich restriktive Voraussetzungen an das Wachstum der Nichtlinearitäten gestellt werden, die jedoch im Spezialfall (2) erfüllt sind.

3.5 Satz

Für das System (1) sei Ω ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand, s_o sei stetig auf $\partial\Omega$ und f_1 und f_2 seien lipschitzstetig. s_o sei nichtnegativ auf $\partial\Omega$ und der positive Kegel sei invariant, d.h. es gelte für alle $s,c,p \geq 0$ $f_1(0,c,p) \geq 0$, $f_2(s,0,p) \geq 0$, $f_2(s,c,0) \leq 0$. Außerdem sollen die folgenden einseitigen Wachstumsbedingungen erfüllt sein: Für alle $s,c,p \geq 0$:
$f_1(s,c,p)$, $f_2(s,c,p) \leq$ const $(1+p)^\gamma$ und
$-f_2(s,c,p) \leq$ const $(1+s)^\alpha (1+c)^\beta$. Dabei seien $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$, $(\gamma - 2/m)\alpha < 1$, $(\gamma - 2/m)(\alpha+\beta - 2/m) < 1$, und im Falle der Raumdimension $m=1$ seien $(\gamma-1)\alpha<1$, $(\gamma-1)(\alpha+\beta-1)<1$. Dann existiert zu nichtnegativem $s_o,c_o,p_o \in L^\infty(\Omega)$ eindeutig eine lokale Lösung, und diese ist bis $T=\infty$ fortsetzbar und global beschränkt durch eine Konstante, die nur von m, Ω, α,β,γ und Schranken für die Anfangs- und Randbedingungen abhängt.

3.6 Korollar

Es sei $m \leq 5$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand. s_o sei nichtnegativ und stetig auf $\partial\Omega$. Dann ist jede (eindeutig existierende) lokale Lösung zu nichtnegativem $s_o,c_o,p_o \in L^\infty(\Omega)$ bis $T=\infty$ fortsetzbar und global beschränkt durch eine Konstante, die nur von Ω und Schranken für s_o,c_o und p_o abhängt.

Beweis: Sei $(s,c,p) \geq 0$ die lokale Lösung von (1). Sie existiert auf einem maximalen Existenzintervall $[0,T_{max})$. Wenn man zeigen kann, daß die Lösung dort beschränkt ist, so folgt aus Satz 2.11, daß $T_{max} = \infty$, d.h. die Lösung existiert in diesem Falle global.

Sei nun $C_o := \sup\{ c_o(x) \mid x \in \Omega\} < \infty$

$P_o := \sup\{ p_o(x) \mid x \in \Omega\} < \infty$

$S_o := \sup\{ s_o(x,t) \mid t=0 \text{ oder } x \in \partial\Omega \wedge t>0 \} < \infty$

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen in (1) erhält man eine Erhaltungsgröße C und L^1-Abschätzungen für c und p:

$$\|c(.,t)\|_1 \,, \|p(.,t)\|_1 \leq \|c(.,t)\|_1 + \|p(.,t)\|_1$$
$$= \int_\Omega (c(x,t)+p(x,t))dx$$
$$= \int_\Omega (c_o(x)+p_o(x))dx =: C|\Omega|$$

Um Korollar 4 anwenden zu können, wird (1) in der folgenden Weise geschrieben:

(16) $\dot{s} = D_s \Delta s + f_1$ $\quad s=s_o$ auf $\partial\Omega\times(0,T)$ $\quad s(.,0)=s_o$

(17) $\dot{c} = D_c \Delta c - c + (f_2+c)$ $\quad \frac{\partial c}{\partial n} = 0$ " $\quad c(.,0)=c_o$

(18) $\dot{p} = D_p \Delta p - p - (f_2-p)$ $\quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0$ " $\quad p(.,0)=p_o$

Korollar 4 liefert für die erste dieser Gleichungen (16) eine Abschätzung

$$\|s(.,t)\|_\infty \leq \text{const } \sup\{ \|f_1(.,\tau)^+\|_q \mid 0\leq\tau\leq t\} + S_o$$

mit $m/2 < q < \infty$

$$\leq \text{const } \sup\{\|(1+p(.,\tau))\|_q^\gamma \mid 0\leq\tau\leq t\} + S_o$$

(19) $$\leq \text{const} \sup_{0\leq\tau\leq t} \|1+p(.,\tau)\|_1^{1/q} \|1+p(.,\tau)\|_\infty^{\gamma-1/q} + S_o$$

falls $q \geq 1/\gamma$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Hölderschen Ungleichung. Entsprechend leitet man mit Korollar 4 aus (17) her:

$$\|c(.,t)\|_\infty \leq \text{const} \sup_{0\leq\tau\leq t} (\|c(.,\tau)\|_q + \|f_2(.,\tau)^+\|_q) + C_o$$

$$\leq \text{const} \sup_{0\leq\tau\leq t} \|c(.,\tau)\|_1^{1/q} \|c(.,\tau)\|_\infty^{1-1/q}$$

$$+ \text{const} \sup_{0\leq\tau\leq t} \|1+p(.,\tau)\|_1^{1/q} \|1+p(.,\tau)\|_\infty^{\gamma-1/q} + C_o \tag{20}$$

Für q gelten dabei dieselben Voraussetzungen wie für (19): $m/2<q<\infty$, $q \geq 1/\gamma$, $q \geq 1$. Der Exponent von $\|c(.,\tau)\|_\infty$ auf der rechten Seite von (20) ist <1, so daß sich die Ungleichung nach

$\sup\{ \|c(.,\tau)\|_\infty \mid 0\leq\tau\leq t\} = \|c\|_{L^\infty(\Omega\times[0,t])} =: \|c\|_\infty$ auflösen läßt mithilfe der Implikation

$$x, c_1, c_2 \geq 0,\ 0<\rho\leq 1,\ x \leq c_1 x^{1-\rho} + c_2 \Rightarrow x \leq c_1^{1/\rho} + c_2/\rho \tag{21}$$

(Beweis: Es ist $x^{1-\rho} \leq (1-\rho)/c_1\, x + b$ für

$b = \sup\{ x^{1-\rho} - (1-\rho)/c_1\, x \mid x\in\mathbb{R}\} = c_1^{(1-\rho)/\rho}\,\rho$,

also $x \leq c_1 x^{1-\rho} + c_2 \leq (1-\rho)x + c_1 b + c_2 = (1-\rho)x + c_1^{1/\rho}\rho + c_2$

$\Rightarrow x \leq c_1^{1/\rho} + c_2/\rho$).

Wegen $\|c(.,t)\|_\infty < \infty$ für $t<T_{max}$ folgt mit (21) aus (20):

$$\|c\|_\infty \leq qC_o + \text{const}\{ \sup \|c(.,\tau)\|_1 \mid 0\leq\tau\leq t\}$$

$$+ \text{const} \sup_{0\leq\tau\leq t} \|1+p(.,\tau)\|_1^{1/q} \|1+p(.,\tau)\|_\infty^{\gamma-1/q}$$

$$\leq qC_o + \text{const}\,(C + (1+C)^{1/q} \|1+p\|_\infty^{\gamma-1/q}) \tag{22}$$

Ganz entsprechend verfährt man mit der Gleichung (18) und erhält

$$\|p\|_\infty \leq P_o + \text{const}\sup\{\|p(.,\tau)\|_1^{1/q} \mid 0\leq\tau\leq t\}\|p\|_\infty^{1-1/q}$$

$$+ \text{const}\sup\{ \|(1+s(.,\tau))^\alpha (1+c(.,\tau))^\beta\|_r \mid 0\leq\tau\leq t\}$$

mit $m/2 < r < \infty$, $r\geq 1$.

Wendet man wieder (21) an, so erhält man

$$\|p\|_\infty \leq qP_o + \text{const}(C + \sup_{0\leq\tau\leq t} \|(1+s(.,\tau))^\alpha (1+c(.,\tau))^\beta\|_r)$$

$$\leq qP_o + \text{const}\,(C + \|1+s\|_\infty^\alpha (1+C)^{1/r} \|1+c\|_\infty^{\beta-1/r})$$

falls $r \geq 1/\beta$.

Mit (19) und (20) folgt hieraus

$$\|1+p\|_\infty \leq 1+qP_o + \text{const } (C + (1+C)^{1/r} \cdot (1+S_o+(1+C)^{\frac{1}{q}}\|1+p\|_\infty^{\gamma-\frac{1}{q}})^{\alpha} \cdot (1+C_o+(1+C)^{\frac{1}{q}}\|1+p\|_\infty^{\gamma-\frac{1}{q}})^{\beta-\frac{1}{r}})$$

$$\leq \text{const } (1 + \|1+p\|_\infty^{\alpha(\gamma-1/q)} + \|1+p\|_\infty^{(\gamma-1/q)(\beta-1/r)} + \|1+p\|_\infty^{(\gamma-1/q)(\alpha+\beta-1/r)})$$

Die Konstante hängt nun nicht mehr nur von m und Ω, sondern auch von C, S_o, C_o und P_o ab. (21) läßt sich nun wieder anwenden, falls $(\alpha+\beta-1/r)(\gamma-1/q) < 1$ (die beiden anderen Exponenten sind dann wegen $\alpha \geq 0$ und $\beta-1/r \geq 0$ ebenfalls <1). In diesem Fall erhält man $\|p(.,t)\|_\infty \leq \text{const}$, und aus (19) und (22) folgt dann auch $\|s(.,t)\|_\infty \leq \text{const}$, $\|c(.,t)\|_\infty \leq \text{const}$, so daß die Lösung für beliebige Zeiten gleichmäßig beschränkt ist, womit die Behauptung bewiesen ist.
Die Bedingung $(\alpha+\beta-1/r)(\gamma-1/q) < 1$ läßt sich zusammen mit den übrigen Voraussetzungen $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1/r$, $\gamma \geq 1/q$, $m/2 < q,r < \infty$, $q,r \geq 1$ genau dann erfüllen, falls $(\gamma-2/m)\alpha < 1$ und $(\gamma-2/m)(\alpha+\beta-2/m) < 1$ für $m \geq 2$, $(\gamma-1)\alpha < 1$ und $(\gamma-1)(\alpha+\beta-1) < 1$ für $m \leq 2$. ∎

II.4 Existenz stationärer Lösungen

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Existenz von stationären Lösungen für das Problem

$$(1)\qquad \begin{aligned} \dot{s} &= D_s s'' + \bar{k}p - ksc & s(0,t) &= s_0 \quad s(1,t) = s_1 \\ \dot{c} &= D_c c'' + \bar{k}p - ksc & c'(0,t) &= c'(1,t) = 0 \\ \dot{p} &= D_p p'' - \bar{k}p + ksc & p'(0,t) &= p'(1,t) = 0 \end{aligned}$$

nachzuweisen. Dieses System hat eine Erhaltungsgröße $C := \frac{1}{l}\int_0^l (c(x,t)+p(x,t))dx$, die durch die Anfangsbedingungen vorgegeben ist. Falls (1) stationäre Lösungen hat, wird man daher Eindeutigkeit nur erwarten, wenn man zusätzlich $C = \frac{1}{l}\int_0^l (c(x)+p(x))dx$ vorschreibt.

Das stationäre System

$$(2)\qquad \begin{aligned} D_s s'' &= -\bar{k}p + ksc & s(0) &= s_0 \quad s(1) = s_1 \\ D_c c'' &= -\bar{k}p + ksc & c'(0) &= c'(1) = 0 \\ D_p p'' &= \bar{k}p - ksc & p'(0) &= p'(1) = 0 \end{aligned}$$

hat dagegen eine andere (räumliche) Integrationskonstante $K := D_c c + D_p p$, der keine Größe im partiellen Differentialgleichungssystem (1) entspricht.
Es soll nun so vorgegangen werden, daß zunächst die Existenz von Lösungen von (2) nachgewiesen wird, und zwar zu jedem $K \geq 0$ genau eine. Anschließend wird eine Beziehung zwischen K und C hergestellt, die zum Nachweis einer eindeutigen stationären Lösung von (1) zu jedem $C \geq 0$ führt.
Das Gleichungssystem (2) geht durch die Transformation

$$(3)\qquad \underline{x} = \left(\frac{\bar{k}}{D_p}\right)^{1/2} x, \underline{s} = \frac{kD_p}{\bar{k}D_c}s,\ \underline{c} = \frac{kD_p}{\bar{k}D_s}c,\ \underline{p} = \frac{kD_p^2}{\bar{k}D_s D_c}p$$

über in $\dfrac{d^2\underline{s}}{d\underline{x}^2} = \dfrac{d^2\underline{c}}{d\underline{x}^2} = -\dfrac{d^2\underline{p}}{d\underline{x}^2} = -\underline{p} + \underline{sc}$

OBdA werde daher das Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
&s'' = -p + sc \qquad s(0) = s_0 \quad s(1) = s_1\\
(4)\qquad &c'' = -p + sc \qquad c'(0) = c'(1) = 0\\
&p'' = \;\; p - sc \qquad p'(0) = p'(1) = 0
\end{aligned}
$$

untersucht.
$(s,c,p) : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ heiße Lösung von (4), falls s stetig, c und p stetig differenzierbar auf [0,1] sind, s,c und p zweimal stetig differenzierbar auf (0,1) und falls die Gleichungen in (4) erfüllt sind. Nun gilt aber für eine derartige Lösung:

$$s(x) = s_0 + (s_1-s_0)\frac{x}{1} - (1-\frac{x}{1})\int_0^x f(\xi)\xi d\xi - \frac{x}{1}\int_x^1 f(\xi)(1-\xi)d\xi$$

mit $f(x) := s(x)c(x) - p(x)$ stetig; $\Rightarrow$
s ist stetig differenzierbar auf [0,1] mit

$$s'(x) = (s_1-s_0)/1 + \int_0^x \frac{\xi}{1} f(\xi)d\xi - \int_x^1 (1-\frac{\xi}{1})f(\xi)d\xi \Rightarrow$$

s' ist stetig differenzierbar auf [0,1] mit $s''=f$.
Entsprechend sind c und p zweimal stetig differenzierbar auf [0,1] , so daß diese Aussage auch für f gilt. Durch Induktion folgt schließlich $s,c,p \in C^\infty([0,1])$.
Im folgenden wird daher davon ausgegangen, daß jede Lösung beliebig glatt ist.
Für eine Lösung von (4) findet man durch Integration sofort $K := c+p = \text{const}$, $\gamma := s'+p' = s'-c' = \text{const}$

$s' = \gamma - p'$, $p'' = p - s(K-p)$ oder

$$
\begin{aligned}
&s' = \gamma - u \qquad s(0) = s_0 \quad s(1) = s_1\\
(5)\qquad &u' = p - s(K-p) \qquad u(0) = 0 \quad u(1) = 0\\
&p' = u
\end{aligned}
$$

(s,c,p) ist also genau dann eine Lösung von (4) mit $c+p=K$, wenn es ein γ gibt, so daß (s,u,p) eine Lösung von (5) ist. (Bezeichnung: (s,u,p,γ) ist Lösung von (5))
Im folgenden werden die nichtnegativen Lösungen von (4) beziehungsweise (5) untersucht. OBdA sei dabei $s_1 \geq s_0 \geq 0$.
Das Randwertproblem (5) hat offenbar genau dann eine Lösung, wenn es ein p_0 und ein γ_0 gibt, so daß für die

Lösung der Anfangswertaufgabe

$$(6)\qquad \begin{aligned} s' &= \gamma - u & s(x_o) &= s_o \\ p' &= u & p(x_o) &= p_o \\ u' &= p - s(K-p) & u(x_o) &= u_o \\ \gamma' &= 0 & \gamma(x_o) &= \gamma_o \end{aligned}$$

mit $x_o=0$, $u_o=0$ gilt: 1 liegt im Existenzintervall und $s(1)=s_1$, $u(1)=0$.

4.1 Lemma

Es seien $K,\gamma_o>0$, $s_o\geq 0$, $-\infty \leq x_1<x_o<x_2\leq \infty$, $p_o,u_o \in \mathbb{R}$ und (s,p,u,γ) eine Lösung von (6) auf (x_1,x_2). Dann gelten die folgenden Implikationen:

a) $u_o\leq 0$, $p_o \leq Ks_o/(1+s_o) \Rightarrow u(x) < 0 \quad \forall x\in(x_o,x_2)$

b) $u_o\leq 0$, $p_o \geq Ks_o/(1+s_o) > 0 \Rightarrow u(x) < 0 \quad \forall x\in(x_1,x_o)$ mit $s>-1$ auf $[x,x_o]$

c) $u_o\geq 0$, $p_o\geq K \Rightarrow u(x) > 0 \quad \forall x\in(x_o,x_2)$ mit $u\leq\gamma$ auf $[x_o,x]$

Beweis: OBdA sei $x_o=0$.

a) Aus $u_o\leq 0$, $u'(0)=p_o(1+s_o)-Ks_o\leq 0$,
$u''(0) = (1+s_o)u_o - (K-p_o)(\gamma-u_o) < 0$ folgt $u(x) < 0$ für $0<x<\varepsilon$ und ε hinreichend klein.
Angenommen, es gebe ein $x>0$ mit $u(x)=0$; sei
$\underline{x} := \min\{ x>0 \mid u(x)=0\}$. Dann ist $u<0$ auf $(0,\underline{x})$ und $u'(\underline{x})\geq 0 \Rightarrow p'=u<0$, $s'=\gamma-u>0$ auf $(0,\underline{x})$
$\Rightarrow p(\underline{x})<p_o<K$, $s(\underline{x})>s_o\geq 0$
$\Rightarrow u'(\underline{x}) = p(\underline{x}) - (K-p(\underline{x}))s(\underline{x})$
$< p(\underline{x}) - (K-p(\underline{x}))s_o < p_o-(K-p_o)s_o \leq 0$
im Widerspruch zur Annahme. Daher ist $u(x) < 0$ für alle $x \in (x_o,x_2)$.

b) Da $u_o\leq 0$, $u'(0)=p_o(1+s_o)-Ks_o \geq 0$ und >0 für $p_o\geq K$, $u''(0) = (1+s_o)u_o - (K-p_o)(\gamma-u_o) < 0$ für $p_o<K$, ist $u<0$ auf einem Intervall $(-\varepsilon,0)$.

Angenommen, es gebe ein $x<0$ mit $u(x)=0$ und $s>-1$ auf $[x,0]$. Mit $\bar{x} := \max\{x<0 \mid u(x)=0\}$ ist $u<0$ auf $(\bar{x},0)$, $u'(\bar{x})\leq 0 \Rightarrow p'=u<0$, $s'=\gamma-u>0$ auf $(\bar{x},0)$

$\Rightarrow p(\bar{x})>p_o$, $-1<s(\bar{x})<s_o$

$\Rightarrow u'(\bar{x}) = p(\bar{x}) - (K-p(\bar{x}))s(\bar{x}) \geq K>0$, falls $p(\bar{x})\geq K$

$u'(\bar{x}) \geq p(\bar{x}) - (K-p(\bar{x}))s_o > p_o(1+s_o)-Ks_o \geq 0$, falls $p(\bar{x})<K$,

also $u'(\bar{x}) > 0$ im Widerspruch zur Annahme.
Hieraus folgt die Behauptung.

c) Aus $u_o\geq 0$ und $u'(0)=(p_o-K)s_o+p_o\geq K>0$ folgt $u>0$ auf einem Intervall $(0,\varepsilon)$.
Angenommen, es gebe ein $x>0$ mit $u(x)=0$, $u\leq\gamma$ auf $[0,x]$, so sei $\underline{x} := \min\{x>0 \mid u(x)=0\} \Rightarrow u'(\underline{x})\leq 0$.
Auf $(0,\underline{x})$ ist $p'=u>0$, $s'=\gamma-u\geq 0$
$\Rightarrow p(\underline{x})>p_o\geq K$, $s(\underline{x})\geq s_o\geq 0 \Rightarrow u'(\underline{x})=(p(\underline{x})-K)s(\underline{x})+p(\underline{x})>K>0$
im Widerspruch zu $u(\underline{x})=0$. Damit ist gezeigt, daß $u(x) > 0 \;\forall\; x\in(0,x_2)$ mit $u\leq\gamma$ auf $[0,x]$. ∎

4.2 Lemma

Seien $l>0$, $K\geq 0$, $s_1\geq s_o\geq -1$ und (s,p,u,γ) eine Lösung von (5) mit $s(x)>-1$ für alle $x\in[0,l]$. Dann gilt:

Falls $K=0$, ist $\gamma = (s_1-s_o)/l$, $u\equiv 0$, $p\equiv 0$

Falls $s_o=s_1$, ist $s\equiv s_o$, $\gamma=0$, $u\equiv 0$, $p\equiv p(0)$

Sonst gilt: $(s_1-s_o)/l < \gamma < (s_1-s_o+p(l)-p(o))/l$
$0<u<\gamma$, $s'>0$, $p'>0$ auf $(0,l)$
$Ks_o/(1+s_o) < p(0) < p(l) < Ks_1/(1+s_1)$
u hat genau ein Extremum, und zwar ein Maximum. Genauer gilt: $\exists x_m\in(0,l)$ mit $u'>0$ auf $[0,x_m)$ und $u'<0$ auf $(x_m,l]$.

Beweis: Für die Lösung gilt $u' = p(1+s)-Ks \Rightarrow$
$K-p = (K-u')/(1+s)$, da $s>-1$. Damit folgt

(7) $u'' = (1+s)p' - (K-p)s' = (1+s)u - (K-p)(\gamma-u)$

(8) $= (1+s+\frac{K}{1+s})u + \frac{\gamma-u}{1+s}u' - \frac{K\gamma}{1+s}$

(9) $= (1+s+\frac{K}{1+s})(u-\gamma) + \frac{\gamma-u}{1+s}u' + (1+s)\gamma$

a) Sei $\gamma \leq 0$. Aus (8) und (9) folgt

$(1+s+\frac{K}{1+s})u + \frac{\gamma-u}{1+s}u' \leq u'' \leq (1+s+\frac{K}{1+s})(u-\gamma) + \frac{\gamma-u}{1+s}u'$

Wegen $u(0)=u(1)=0$ folgt aus dem Maximumprinzip $0 \geq u \geq \gamma$ auf $[0,1]$. Damit ist $s_1-s_0 = \int_0^1 (\gamma-u(x))dx \leq 0$ $\Rightarrow s_1 \leq s_0$. Wäre u irgendwo $>\gamma$, so wäre $s_1-s_0 = \int_0^1 (\gamma-u(x))dx < 0$ im Widerspruch zu $s_1 \geq s_0$. Daher ist $u \equiv \gamma$ und $\gamma = u(0) = 0$ $\Rightarrow \gamma = 0$, $u \equiv 0$, $s \equiv s_0$ und $p \equiv Ks_0/(1+s_0)$.

b) Sei $\gamma > 0$. Aus (8) und (9) folgt

$(1+s+\frac{K}{1+s})(u-\gamma) + \frac{\gamma-u}{1+s}u' < u'' \leq (1+s+\frac{K}{1+s})u + \frac{\gamma-u}{1+s}u'$

In der zweiten Ungleichung kann man $\leq$ durch $<$ ersetzen, falls $K>0$. Mit dem Maximumprinzip erhält man wieder $\gamma > u \geq 0$; falls $K>0$ sogar $u>0$ auf $(0,1)$. Damit ist $u'(0) \geq 0$, $u'(1) \leq 0$, und aus (5) folgt im Falle $K=0$: $p(1) \leq 0 \leq p(0)$, $p(1)-p(0) = \int_0^1 u(x)dx \geq 0$, so daß $p(0)=p(1)=0$, $u \equiv 0$, $p \equiv 0$.

Im Falle $K>0$ ist wegen des starken Maximumprinzips sogar $0 < u'(0) = p(0)(1+s_0) - Ks_0$ und

$0 > u'(1) = p(1)(1+s_1) - Ks_1$, so daß

$p(0) > Ks_0/(1+s_0)$ und $p(1) < Ks_1/(1+s_1)$. Aus $p'=u>0$ folgt $p(0)<p(1)$. Schließlich ist

$\gamma = s'+p' = (s_1+p(1)-s_0-p(0))/1 > (s_1-s_0)/1$.

In diesem Falle ($\gamma>0$ und $K>0$) folgt weiter aus (7)

$u''' = (1+s+K-p)u' + us' + (\gamma-u)p'$

$= (1+s+K-p)u' + 2u(\gamma-u) > (1+s+K-p)u'$ auf $(0,1)$.

u' kann demnach kein nichtnegatives Maximum auf $(0,1)$ haben. Mit $u'(0) > 0 > u'(1)$ folgt, daß u' genau eine Nullstelle hat.

Auf das Differentialgleichungssystem (6) soll ein Satz von Ważewski [74] angewandt werden. Um Ważewskis Ergebnis formulieren zu können, müssen einige Bezeichnungen eingeführt werden.

$\dot{y} = f(t,y)$

sei ein n-dimensionales Differentialgleichungssystem mit den folgenden Eigenschaften:

f ist stetig.

Jede zugehörige Anfangswertaufgabe ist lokal eindeutig lösbar.

Dann sei I(t,y) die Integralkurve durch den Punkt (t,y) und $I_+(t,y) := \{ (s,\eta) \in I(t,y) \mid s \geq 0 \}$,

$(t,y) \in I(t_o,y_o) \Leftrightarrow: y = g(t;t_o,y_o)$.

$W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei offen, und $\tilde{W} \subset W$ definiert durch

$\tilde{W} := \{ (t,y) \in W \mid I_+(t,y) \cap \partial W \neq \emptyset \}$ "ombre gauche".

Die Abbildung $\mathcal{C}$ ("conséquent") ordne jedem Punkt $P \in \tilde{W}$ den Punkt aus ∂W zu, in dem die Trajektorie durch P den Rand von W zum erstenmal trifft:

$\mathcal{C} : \tilde{W} \to W$

$(t,y) \to (t_1, g(t_1;t,y))$

mit $t_1 := \inf \{ s>0 \mid (s,g(s;t,y)) \in \partial W \}$

Weiter sei $S := \mathcal{C}(\tilde{W})$ "points de sortie" und

$S^* := \{ (t,y) \in S \mid \exists \varepsilon > 0 \ \forall s \in (t,t+\varepsilon) \text{ ist } (s,g(s;t,y)) \notin \bar{W} \}$

"points de sortie stricte".

Ist ∂W in der Umgebung eines Punktes $P \in S$ eine n-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit, so gehört P genau dann zu S^*, wenn das durch die Differentialgleichung definierte Vektorfeld in P nicht tangential ist.

$\mathcal{C}$ kann durch $\mathcal{C}(P)=P$ für alle $P \in S$ auf $\tilde{W} \cup S$ fortgesetzt werden. Es gilt dann der folgende

4.3 Satz (Ważewski)

$S = S^* \Rightarrow \mathcal{C} : \tilde{W} \cup S \to S$ ist stetig.

Für das vorliegende Differentialgleichungssystem (6) wird im folgenden zunächst eine Menge W definiert. Die Bezeichnungen $\tilde{W}, S, S^*, \tilde{c}$ werden dann in derselben Weise verwendet, wie sie für die Formulierung von Satz 3 eingeführt wurden.

Es seien $1, K, \underline{\gamma}, s_1 > 0$ und

$W := \{(x,s,p,u,\gamma) \in \mathbb{R}^5 \mid x<1,\ -1<s<s_1,\ u<\gamma, \gamma>\underline{\gamma}\}$.

Dann ist $\partial W = \{(x,s,p,u,\gamma) \in \tilde{W} \mid x=1 \vee s=-1 \vee s=s_1 \vee u=\gamma \vee \gamma=\underline{\gamma}\}$

4.4 Lemma $\quad \tilde{W} = W$

Beweis: Falls die Integralkurve durch einen Punkt $P_o = (x_o, s_o, p_o, u_o, \gamma_o) \in W$ bis $x=1$ fortgesetzt werden kann, ist offenbar $I_+(P_o) \cap \partial W \neq \emptyset$.

Andernfalls gibt es ein $x_1 \leq 1$ mit

$x \nearrow x_1 \Rightarrow |s(x)| \to \infty \vee |p| \to \infty \vee |u| \to \infty$. Wenn die Trajektorie bis x_1 in W bliebe, so wäre $s(x) \in (-1, s_1)$ und $u(x) < \gamma$ für alle $x \in [x_o, x_1)$; demnach wäre

$\lim_{\substack{x \to x_1 \\ x<x_1}} |p(x)| = \infty$ oder $\lim_{\substack{x \to x_1 \\ x<x_1}} u(x) = -\infty$

Dies führt jedoch zum Widerspruch, wie die folgende Abschätzung zeigt:

$$p(x) = p(x_o) + p'(x_o)(x-x_o) + \int_{x_o}^{x} (x-\xi) p''(\xi)\, d\xi$$

$$= p_o + u_o(x-x_o) + \int_{x_o}^{x} (x-\xi)((1+s(\xi))p(\xi) - Ks(\xi))\, d\xi$$

$$\Rightarrow |p(x)| \leq |p_o| + |u_o|(x-x_o) + \int_{x_o}^{x} (x-\xi)((2+s_1)|p(\xi)| + K(1+s_1))\, d\xi$$

$$\leq |p_o| + (|u_o| + K(1+s_1))(1-x_o) + (2+s_1)(1-x_o) \int_{x_o}^{x} |p(\xi)|\, d\xi \qquad \forall x \in (x_o, x_1)$$

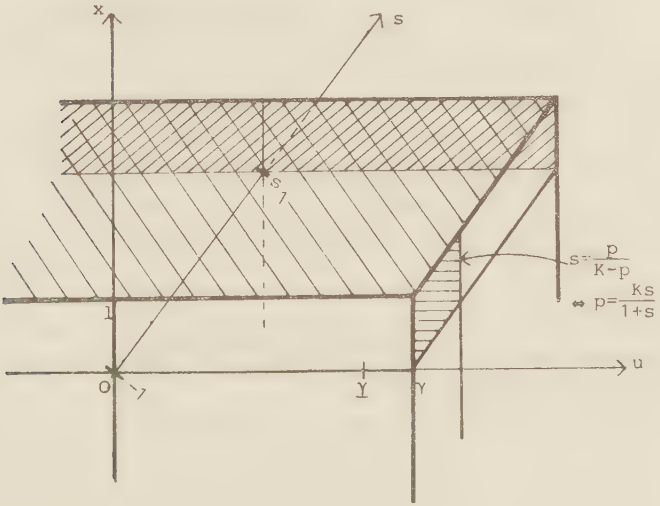
Aus dem Lemma von Gronwall folgt damit $|p(x)| \leq M$

für alle $x\in(x_o,x_1)$ und ein geeignetes M. Dann ist auch $|u(x)| \leq |u_o| + \int_{x_o}^{x} |p(\xi)|d\xi \leq |u_o| + (1-x_o)M$ im Widerspruch zu $\sup\{|p(x)|+|u(x)| \mid x\in(x_o,x_1)\} = \infty$ Die Trajektorie durch P_o verläßt also W schon vor x_1, so daß auch in diesem Fall $I_+(P_o)\cap \partial W \neq \emptyset$. □

4.5 Lemma

$S = S^* = \{(x,s,p,u,\gamma)\in \partial W \mid x=1 \vee (s=s_1 \wedge u<\gamma) \vee (u=\gamma \wedge (p>\frac{Ks}{1+s} \vee s=-1))\}$

Beweis: W besteht aus fünf glatten Hyperflächenstücken, die einzeln untersucht werden sollen:
$x=1$; $s=-1\wedge u<\gamma$; $s=s_1\wedge u<\gamma$; $u=\gamma\wedge s\geq -1$; $\gamma=\underline{\gamma}$.
Zur Veranschaulichung diene diese dreidimensionale Projektion von W (zu festem p und γ):



betrachtete Hyperebene	einschränkende Bedingung	äußere Normalableitung	Folgerung
$x=1$		$x'=1$	Trajektorien **schneiden** von innen nach außen, in S*
$s=-1$	$u<\gamma$	$-s'<0$	Trajektorien schneiden von außen nach innen, nicht in S
$s=s_1$	$u<\gamma$	$s'>0$	Trajektorien schneiden von innen nach außen, in S*
$u=\gamma$	$s=-1$	$u'=K>0$	Trajektorien schneiden von innen nach außen, in S*
$u=\gamma$	$s>-1, p>-\frac{Ks}{1+s}$	$u'>0$	Trajektorien schneiden von innen nach außen, in S*
$u=\gamma$	$s>-1, p<-\frac{Ks}{1+s}$	$u'<0$	Trajektorien schneiden von außen nach innen, nicht in S
$u=\gamma$	$s>-1, p=-\frac{Ks}{1+s}$	$u'=0$ $u''=(1+s)\gamma>0$	Trajektorien berühren die Hyperebene von außen, nicht in S
$\gamma=\underline{\gamma}$		$\gamma'=0$	Trajektorien in der Hyperebene, nicht in S

Damit ist gezeigt, daß alle Punkte auf ∂W entweder nicht in S oder in S* liegen, also folgt S=S*.
Auf der Abbildung ist S schraffiert dargestellt. □

Wegen $W=\tilde{W}$ ist $\mathcal{C}$ auf WUS definiert und stetig, da S=S*.
Für festes $K > 0$, $\underline{\gamma} > 0$, $s_0 \geq 0$ werden die folgenden Abbildungen definiert:

$f: [0,K] \times (\underline{\gamma}, \infty) \to S$

$(p_0, \gamma_0) \to \mathcal{C}(0, s_0, p_0, 0, \gamma_0)$

$$g : \quad S \to F := \{(x,s,v) \mid 0 \le x \le 1, -1 \le s \le s_1, v \le 1, x = 1 \vee s = s_1 \vee v = 1\}$$
$$(x,s,p,u,\gamma) \to (x,s,u/\gamma)$$

$h : [0,K] \times (\underline{\gamma},\infty) \to F$, $h = (h_1,h_2,h_3) := g \circ f$
h ist stetig.

4.6 Lemma

Sei $\underline{\gamma}_o > \underline{\gamma}$, $l>0$ und $s_1 \ge s_o + \underline{\gamma}_o l$. Dann gibt es im Definitionsbereich von h $D(h) = [0,K] \times (\underline{\gamma},\infty)$ ein offenes Rechteck R, so daß $h(\partial R)$ bezüglich des Punktes $P_1 := (1,s_1,0)$ auf der Fläche F die Windungszahl 1 hat.

Beweis: Wähle $R = (0,K) \times (\underline{\gamma}_o,\bar{\gamma})$ und

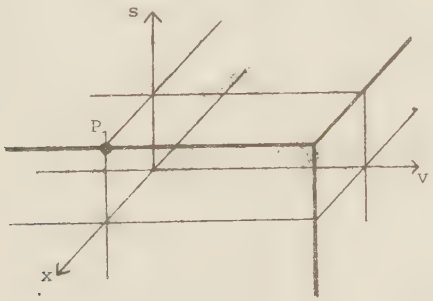
$$\bar{\gamma} := \frac{s_1 - s_o}{l} + \frac{K \cosh((1+s_1)^{1/2} l) - 1}{(1+s_1) l}$$

Nun wird das Bild von ∂R unter der Abbildung h bestimmt:

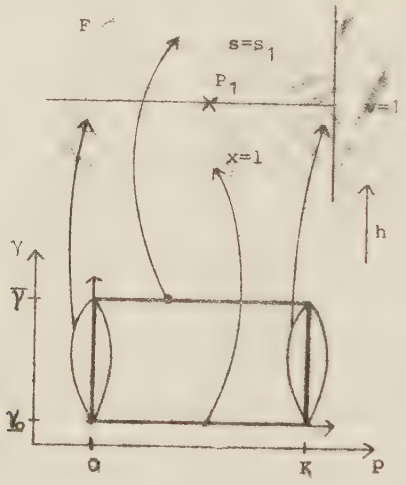
a) Sei $p_o = 0$. Aus Lemma 1 folgt $u(x) < 0 \ \forall x \in (0,1]$, daher $h_3(0,\gamma_o) < 0$ für alle $\gamma_o \in [\underline{\gamma}_o,\bar{\gamma}]$.

b) Sei $p_o = K$. Aus Lemma 1c folgt $h_3(K,\gamma_o) > 0 \ \forall \gamma_o \in [\underline{\gamma}_o,\bar{\gamma}]$

Aus der Stetigkeit von h folgt, daß der Wert $h_3 = 0$, d.h. $u = 0$ auf jeder der beiden Strecken $(0,K) \times \{\underline{\gamma}_o\}$ und $(0,K) \times \{\bar{\gamma}\}$ mindestens einmal angenommen wird. Es



muß nur noch gezeigt werden, daß in den jeweiligen Punkten im ersten Fall $h_2<s_1$ ist und im zweiten Fall $h_1<1$.



c) Sei $\gamma = \gamma_o = \underline{\gamma}_o \leq (s_1-s_o)/1$.
Angenommen, es gebe ein p_o mit $h_3(p_o,\gamma_o) = 0$ und $h_2(p_o,\gamma_o) = s_1$. Dann gibt es ein $x_1 \in (0,1]$ mit $s(x_1) = s_1$, $u(x_1) = 0$ und $s \leq s_1$ auf $[0,x_1]$. Aus Lemma 1 folgt $p_o > Ks_o/(1+s_o)$,
$\Rightarrow$ $u'(0) = p_o(1+s_o) - Ks_o > 0$ $\Rightarrow$ $u>0$ auf einem Intervall $(0,\varepsilon)$.
Mit $\underline{x} := \min \{x>0 \mid u(x)=0\}$ folgt $\underline{x} \leq x_1$, $s(\underline{x}) \leq s_1$, $u(\underline{x})=0$, $u'(\underline{x}) \leq 0$, $p(\underline{x}) \leq \frac{Ks(\underline{x})}{1+s(\underline{x})}$.
Wäre $\underline{x}<x_1$, so könnte aus Lemma 1 geschlossen werden, daß $u(x_1)<0$; also ist $\underline{x}=x_1$.
$\Rightarrow$ $s_1-s_o = \int_o^{x_1} (\gamma-u(x))dx < \gamma x_1 \leq \gamma 1 = \underline{\gamma}_o 1$
im Widerspruch zur Voraussetzung $s_1 \geq s_o + \underline{\gamma}_o 1$.
Die Annahme ist daher nicht haltbar, und für alle

p_o mit $h_3(p_o,\gamma_o)=0$ gilt also $h_2(p_o,\gamma_o)<s_1$. Da das Bild von h auf F liegt, ist $h_1(p_o,\gamma_o)=1$.

d) Sei $\gamma = \gamma_o = \bar{\gamma}$.

Angenommen, es gebe ein $p_o \in (0,K)$ mit $h_3(p_o,\gamma_o)=0$ und $h_1(p_o,\gamma_o) = 1$. Dann ist für die Trajektorie durch $(0,s_o,p_o,0,\gamma_o)$ $s \leq s_1$ und $u<\gamma$ auf $[0,1]$, $u(1)=0$. Wegen Lemma 1 ist dann $p_o > Ks_o/(1+s_o)$,$\Rightarrow$ $u'(0)>0$ $\Rightarrow$ $u>0$ auf einem Intervall $(0,\varepsilon)$. Wie in c) folgt $u>0$ auf $(0,1)$. Mit Lemma 1c schließt man $p<K$ auf $[0,1)$. Mit (7) ist

$$u'' = (1+s)u - (K-p)(\gamma-u) \leq (1+s_1)u \quad \text{auf } [0,1] ,$$

$$u(x) = u_o + u'(0)x + \int_o^x (x-\xi)u''(\xi)d\xi$$

$$\leq u'(0)x + (1+s_1)\int_o^x (x-\xi)u(\xi)d\xi \quad \forall x \in [0,1]$$

Aus dem Lemma von Gronwall folgt

$$u(x) \leq \frac{u'(0)}{\sqrt{1+s_1}} \sinh \sqrt{1+s_1}\, x \quad \Rightarrow$$

$$s_1 - s_o = \int_o^1 (\gamma - u(x))dx \geq \bar{\gamma}1 - \frac{u'(0)}{1+s_1}(\cosh(\sqrt{1+s_1}\,1)-1)$$

Da $u'(0) = p_o-(K-p_o)s_o < p_o < K$, steht die letzte Ungleichung im Widerspruch zur Definition von $\bar{\gamma}$. Die Annahme war also falsch, und für $p_o \in (0,K)$ mit $h_3(p_o,\gamma_o) = 0$ ist $h_1(p_o,\gamma_o) < 1$.

4.7 Folgerung

Für alle $K,1 > 0$ und $s_1 > s_o \geq 0$ gibt es ein $\gamma > (s_1-s_o)/1$ und eine Lösung des Randwertproblems (5).

Beweis: Es ist der Abbildungsgrad $\deg(R,h,P_1) = 1$ (vgl. z. B. §13 in [11]). Deshalb gibt es ein $(p_o,\gamma_o) \in R$ mit $h(p_o,\gamma_o) = P_1$. Es gibt also eine Lösung von (6) mit $u_o=0$, $u(1)=0$ und $s(1) = s_1 \geq s_o+\gamma_o 1$. Da diese Lösung ganz in $\bar{W}$ liegt, folgt $-1<s<s_1$ und $u<\gamma$ auf $(0,1)$. Ist nun

s_1 vorgegeben, so kann man $\gamma_o = (s_1 - s_o)/1$ wählen. Dann gilt für das γ_o der eben nachgewiesenen Lösung von (6) mit $s(1)=s_1$, $u(1)=0$: $\gamma=\gamma_o > \underline{\gamma}_o$. Hieraus folgt die Behauptung. ∎

Damit ist die Existenz einer Lösung (s,p,u,γ) mit $s>-1$ von (5) bewiesen für alle $K\geq 0$, $s_1 \geq s_o \geq 0$ (für $K=0$ oder $s_1=s_o$ ist sie trivial). Aus Lemma 2 folgt, daß für jede solche Lösung s,p und $c=K-p$ nichtnegativ sind. Es soll gezeigt werden, daß die Lösung eindeutig ist.

4.8 Lemma

Sei $s_1 \geq s_o \geq 0$. Zu jedem $K\geq 0$ gibt es höchstens ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so daß die Randwertaufgabe (5) eine Lösung mit $s > -1$ hat. Diese ist eindeutig. γ und die Lösung hängen stetig von K ab. Die Abbildungen $K \to K-p$, $K \to p$, $K \to \gamma$ sind monoton. Die erste ist stets streng monoton, die zweite im Falle $s_1>0$, die letzte im Falle $s_1>s_o$.

Beweis: Zu $K^1, K^2 \geq 0$ seien zwei Lösungen (s^i,p^i,u^i,γ^i) $i=1,2$ mit $s^1, s^2 > -1$ gegeben. Aus Lemma 2 folgt für $i=1,2$ $\gamma^i \geq 0$, $s_o \leq s^i \leq s_1$, $0 \leq p^i \leq K^i$, $0 \leq u^i \leq \gamma^i$. Definiere nun $\bar{\gamma} := \gamma^2 - \gamma^1$, $\bar{s} := s^2 - s^1$, $\bar{p} := p^2 - p^1$, $\bar{u} := u^2 - u^1$, $\bar{K} := K^2 - K^1$.

Damit folgt

$$\bar{s}' = \bar{\gamma} - \bar{u} \qquad \bar{s}(0) = \bar{s}(1) = 0 \tag{10}$$

$$\bar{p}' = \bar{u} \qquad \bar{u}(0) = \bar{u}(1) = 0$$

$$\bar{u}' = \bar{p}'' = -\bar{s}'' = -\bar{K}s^1 - (K^2-p^2)\bar{s} + (1+s^1)\bar{p} \tag{11}$$

$$= -\bar{K}s^2 - (K^1-p^1)\bar{s} + (1+s^2)\bar{p} \tag{12}$$

Aus $\bar{s}'+\bar{p}' = \bar{\gamma}$ und $\bar{s}(0) = \bar{s}(1) = 0$ folgt

$$\bar{p} = \bar{p}(0) + \bar{\gamma}x - \bar{s} \tag{13}$$

(14) $\bar{s} = \bar{p}(0) + \bar{\gamma}x - \bar{p} = \bar{p}(1) - \bar{\gamma}(1-x) - \bar{p}$

Aus (11) und (13) folgt

(15) $\bar{u}' = \bar{p}'' = -\bar{s}'' = -s^1\bar{K} - (K^2-p^2+1+s^1)\bar{s} + \underset{(\bar{p}(0)+\bar{\gamma}x)}{(1+s^1)}$

Aus (12) folgt

(16) $\bar{u}'' = (1+s^2)\bar{p}' - (K^1-p^1)\bar{s}' - s^2'(\bar{K}-\bar{p}) + \bar{s}p^1'$
$= (1+s^2+K^1-p^1)\bar{u} - (K^1-p^1)\bar{\gamma} - (\gamma^2-u^2)(\bar{K}-\bar{p}) + u^1\bar{s}$

wegen (5) und (10). Insbesondere ist wegen der Randbedingungen $\bar{u}^i(0)=\bar{u}^i(1)=0$, $\bar{s}(0)=\bar{s}(1)=0$

(17) $\bar{u}''(0) = -(K^1-p^1(0))\bar{\gamma} - \gamma^2(\bar{K}-\bar{p}(0))$
$\bar{u}''(1) = -(K^1-p^1(1))\bar{\gamma} - \gamma^2(\bar{K}-\bar{p}(1))$

Aus (11) sieht man noch

(18) $\bar{u}'(0) = (1+s_o)\bar{p}(0)-\bar{K}s_o$, $\bar{u}'(1) = (1+s_1)\bar{p}(1)-\bar{K}s_1$

a) Aus $\bar{K}\geq 0$ folgt $\bar{\gamma}\geq 0$, aus $\bar{K}\leq 0$ folgt $\bar{\gamma}\leq 0$. Außerdem ist $|\bar{\gamma}| \leq \min(\gamma^1,\gamma^2)\bar{K}/(1+s_o)^2$.

Beweis: Sei $\bar{\gamma}>0$. Aus den Randbedingungen für $\bar{s}$: $\bar{s}(0)=\bar{s}(1)=0$, $\bar{s}'(0)=\bar{\gamma}-\bar{u}(0)=\bar{\gamma}>0$, $\bar{s}'(1)=\bar{\gamma}-\bar{u}(1)=\bar{\gamma}>0$ folgt $\bar{s}>0$ auf einem Intervall $(0,\varepsilon)$ und $\bar{s}<0$ auf einem Intervall $(1-\varepsilon,1)$ für geeignetes $\varepsilon>0$. Daher gibt es x_1 und x_2 mit $0<x_1<x_2<1$ mit $\bar{s}(x_1)>0$, $\bar{s}'(x_1)=0$, $\bar{s}''(x_1)\leq 0$; $\bar{s}(x_2)<0$, $\bar{s}'(x_2)=0$, $\bar{s}''(x_2)\geq 0$. Wegen Lemma 2 ist $p^2\leq K^2$, und damit folgt aus (15):

$0 \geq \bar{s}''(x_1) \geq \bar{K}s^1(x_1) - (1+s^1(x_1))(\bar{p}_o+\bar{\gamma}x_1)$
$0 \leq \bar{s}''(x_2) \leq \bar{K}s^1(x_2) - (1+s^1(x_2))(\bar{p}_o+\bar{\gamma}x_2) \Rightarrow$

$$0 \geq \frac{\bar{K}\,(s^1(x_1) - s^1(x_2))}{(1+s^1(x_1))(1+s^1(x_2))} + \bar{\gamma}(x_2-x_1)$$

Wegen Lemma 2 ist $0 \leq s^1{}' = \gamma^1-u^1 \leq \gamma^1$, also $s^1(x_1) \leq s^1(x_2)$, so daß aus der letzten Ungleichung $\bar{K}>0$ und $s^1(x_1) < s^1(x_2)$ folgt und schließlich

$$\bar{\gamma} < \frac{\bar{K}}{(1+s_o)^2}\,\frac{s^1(x_2)-s^1(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{\bar{K}}{(1+s_o)^2}\sup_{x_1<x<x_2} s^1{}'(x)$$
$$\leq \bar{K}\,\gamma^1/(1+s_o)^2$$

Entsprechend gilt für $\bar{\gamma}<0$: $\bar{K}<0$ und $|\bar{\gamma}| < |\bar{K}|\gamma^2/(1+s_o)^2$. Insbesondere folgt aus $\bar{K}=0$ auch $\bar{\gamma}=0$. Dadurch wird eindeutig eine Abbildung $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $K \to \gamma$ definiert, die nach dem eben Bewiesenen monoton und stetig ist.

b) Aus $\bar{K}=0$ folgt $\bar{p}(0)=\bar{p}(1)=0$. Aus $s_o=s_1$ folgt $\bar{p}(0)=\bar{p}(1) = \bar{K}s_o/(1+s_o)$. Falls $s_1>s_o$ und $\bar{K}>0$, so ist $\bar{p}(0) > \bar{K}s_o/(1+s_o)$, $\bar{p}(1) < \bar{K}s_1/(1+s_1)$, d.h. $\bar{u}'(0)>0$ und $\bar{u}'(1)<0$.

Beweis: Die Bezeichnung "$\lesssim$" bedeute: "<", falls $\bar{K}>0$ und $s_1>s_o$ und "$\leq$", falls $\bar{K}=0$ oder $s_1=s_o$. Dann folgt aus a) $\bar{\gamma} \gtrsim 0$.

α) Es ist $\bar{p}(0) \gtrsim \bar{K}s_o/(1+s_o)$, denn andernfalls wäre nach (18) $\bar{u}'(0)\leq 0$; und falls $\bar{u}'(0)=0$, ist gemäß der Annahme $s_1>s_o$ und $\bar{K}>0$, $\bar{p}(0) = \bar{K}s_o/(1+s_o) < \bar{K}$ $\Rightarrow \bar{u}''(0) \overset{(17)}{=\!=} -(K^1-p^1(0))\bar{\gamma} - \gamma^2(\bar{K}-\bar{p}(0)) < 0$, so daß man in beiden Fällen schließen kann, daß $\bar{u}<0$ auf einem Intervall $(0,\varepsilon)$ für ein $\varepsilon>0$.

Sei $\underline{x} := \min\{x>0 \mid \bar{u}(x)=0\} \leq 1$. Dann $\bar{u}(\underline{x})=0$, $\bar{u}'(\underline{x})\geq 0$ und $\bar{u}<0$ auf $(0,\underline{x})$. Hieraus folgt $\bar{p}(\underline{x})<\bar{p}(0)$ und wegen $\bar{\gamma}\geq 0$ $\bar{s}(\underline{x})>\bar{s}(0)=0$. Mit (12) ist

$$\bar{u}'(\underline{x}) = (1+s^2(\underline{x}))\bar{p}(\underline{x}) - s^2(\underline{x})\bar{K} - (K^1-p^1(\underline{x}))\bar{s}(\underline{x})$$

$$\lesssim (1+s^2(\underline{x}))\left(\bar{p}(\underline{x}) - \frac{\bar{K}s^2(\underline{x})}{1+s^2(\underline{x})}\right)$$

$$< (1+s^2(\underline{x}))\left(\bar{p}(0) - \frac{\bar{K}s_o}{1+s_o}\right) \leq 0$$

Die Annahme ist damit zum Widerspruch geführt.

β) $\bar{p}(1) \lesssim \bar{K}s_1/(1+s_1)$. Denn wenn man das Gegenteil annimmt, so ist $\bar{u}'(1)>0$ oder $(\bar{u}'(1)=0 \wedge s_1>s_o \wedge \bar{K}>0$ $\Rightarrow \gamma^2>0$ und $\bar{u}''(1) = -(K^1-p^1(1))\bar{\gamma} - \gamma^2(\bar{K}-\bar{p}(1))$ $= -(K^1-p^1(1))\bar{\gamma} - \gamma^2\bar{K}/(1+s_1) < 0)$

und daher $\bar{u}<0$ auf einem Intervall $(1-\bar{x},1)$, wobei $\bar{x}\in[0,1)$ minimal mit dieser Eigenschaft sei. Wie

unter α) zeigt man $\bar{u}'(\bar{x})>0$, was im Widerspruch zur Wahl von $\bar{x}$ steht.

Die Behauptung von b) ist damit gezeigt für den Fall $s_1>s_o$ und $\bar{K}>0$.
Für $\bar{K}=0$ ergibt sich aus a),α) und β): $\bar{\gamma}=0 \Rightarrow \bar{p}(0)=\bar{p}(1) \Rightarrow 0\leq\bar{p}(0)=\bar{p}(1)\leq 0 \Rightarrow \bar{p}(0)=\bar{p}(1)=0$.
Für $s_1=s_o$ ist $\bar{p}(1)-\bar{p}(0) = \bar{\gamma}1 \geq 0$ und
$\bar{p}(1)-\bar{p}(0) \leq \bar{K}s_1/(1+s_1)-\bar{K}s_o/(1+s_o) = 0$, daher
$\bar{p}(0) = \bar{p}(1) = \bar{K}s_o/(1+s_o)$.

c) Sei $s_1>s_o$. Dann folgt aus $\bar{\gamma}=0$, daß auch $\bar{K}=0$, d.h. die Abbildung $\bar{K} \to \bar{\gamma}$ ist in diesem Fall streng monoton wachsend.
Beweis: Angenommen, $\bar{K}$ sei >0. Aus $\bar{\gamma}=0$ folgt $\bar{s}'(0)=\bar{s}'(1)=0$. Nach b) ist $\bar{s}''(0) = -\bar{u}'(0) < 0$, $\bar{s}''(1) = -\bar{u}'(1) > 0$, so daß $\bar{s}<0$ auf $(0,\varepsilon)$ und $\bar{s}>0$ auf $(1-\varepsilon,1)$ für ein $\varepsilon>0$. Wie unter a) konstruiert man nun x_1 und x_2 mit $0<x_1<x_2<1$ und $\bar{s}(x_1)\leq 0$, $\bar{s}'(x_1)=0$, $\bar{s}''(x_1)\geq 0$; $\bar{s}(x_2)>0$, $\bar{s}'(x_2)=0$, $\bar{s}''(x_2)\leq 0$.
Analog zu a) zeigt man $\bar{K}(s^1(x_2)-s^1(x_1))\leq 0$. Da s^1 streng monoton wachsend ist, steht dies im Widerspruch zu $\bar{K}>0$.

d) Für $s_1=0$ und $\bar{K}=0$ ist $\bar{p}\equiv 0$.
Falls $s_1>0$, folgt aus $\bar{K} \gtrless 0$, daß $\bar{p} \gtrless 0$, $\bar{K}-\bar{p} \gtrless 0$ auf $[0,1]$. Die Zuordnungen $K \to p$ und $K \to K-p$ sind daher eindeutig, stetig und monoton wachsend (streng für $s_1>0$).
Beweis: Aus b) folgt wegen $\bar{s}'+\bar{p}'=\bar{\gamma}$, $\bar{s}(0)=\bar{s}(1)=0$:

$$\frac{\bar{K}s_o}{1+s_o} + \bar{\gamma}x \lesssim \bar{p}(0)+\bar{\gamma}x = \bar{p}(x)+\bar{s}(x) = \bar{p}(1)-\bar{\gamma}(1-x)$$

wenn (oBdA) $\bar{K}\geq 0$;

$$\lesssim \frac{\bar{K}s_1}{1+s_1} - \bar{\gamma}(1-x)$$

insbesondere
$0 \leq \bar{K}s_o/(1+s_o) \lesssim \bar{p}(0) \lesssim \bar{K}s_1/(1+s_1) - \bar{\gamma}1 \lesssim \bar{K}$ und

$$0 \lesssim \bar{K}s_o/(1+s_o) + \bar{\gamma}l \lesssim \bar{p}(1) \lesssim \bar{K}s_1/(1+s_1) \lesssim \bar{K}$$

Es gilt mit (12) und (14)

$$\begin{aligned}\bar{p}'' = \bar{u}' &= (1+s^2)\bar{p} - (K^1-p^1)\bar{s} - s^2\bar{K} \\ &= (1+s^2+K^1-p^1)\bar{p} - (K^1-p^1)(\bar{p}(0)+\bar{\gamma}x) - s^2\bar{K} \\ &= (1+s^2+K^1-p^1)(\bar{p}-\bar{K}) + (K^1-p^1)(\bar{K}-\bar{p}(1)+\bar{\gamma}(1-x)) \\ &\qquad + \bar{K}\end{aligned}$$

woraus mithilfe der vorherigen Ungleichungen folgt

$$(1+s^2+K^1-p^1)(\bar{p}-\bar{K}) \leq \bar{p}'' \leq (1+s^2+K^1-p^1)\bar{p}$$

Zusammen mit den Randbedingungen $0 \leq \bar{p}(0), \bar{p}(1) \leq \bar{K}$ erhält man mit dem Maximumprinzip $0 \leq \bar{p} \leq \bar{K}$.

Falls $\bar{K}>0$, gilt sogar $\bar{p}(0), \bar{p}(1) < \bar{K}$, also $0 \leq \bar{p} < \bar{K}$, und falls zusätzlich $s_1>0$, ist $0 < \bar{p}(0), \bar{p}(1)$, $0 < \bar{p} < \bar{K}$.

Wenn $\bar{K}=0$ ist, ist offenbar $\bar{p} \equiv 0$, und wenn $s_1=s_o=0$, ist wegen Lemma 2 und $\bar{p}(0)=0$ ebenfalls $\bar{p} \equiv 0$.

e) Die Abbildung $K \to s$ ist wohldefiniert und stetig.
Dies folgt nun aus a) und d), da
$s(x) = s_o + p(0) - p(x) + \gamma x$.

f) Sämtliche Ableitungen von s und p hängen stetig von K ab.
Beweis: Da $u(0)=0$ und $u' = p-(K-p)s$ stetig von K abhängt, gilt dies auch für u. Der Rest folgt durch vollständige Induktion.

Damit sind alle Aussagen von Lemma 8 gezeigt. □

Überträgt man die bisherigen Ergebnisse auf das Randwertproblem (2), indem man die Transformation (3) rückgängig macht, so ergibt sich:

Seien $l>0$ und $s_1 \geq s_o \geq 0$. Dann hat (2) zu jedem $K \geq 0$ genau eine Lösung mit $s \geq 0$ und $D_c c + D_p p = K$. Für diese gilt auch $p \geq 0$, $c \geq 0$. Im Falle $s_1=s_o$ oder $K=0$ ist sie trivial; sonst gilt $p>0$, $c>0$, $s'>0$ auf $[0,1]$ und $p'>0$, $c'<0$ auf $(0,1)$.

c und p hängen dabei monoton von K ab; c stets streng monoton und p streng monoton, falls $s_1>0$.
Es muß noch eine Beziehung zwischen der Größe K, die keine physikalische Bedeutung hat, und der Erhaltungsgröße $C = 1/l\int_0^l (c(x)+p(x))dx$ ("mittlere Carrierdichte") hergestellt werden. Da die Abbildungen $K\to c$ und $K\to p$ streng monoton (im Spezialfall $s_1=s_o=0$ nur die erste streng) und stetig sind, gilt dies auch für $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $K \to C$. Dabei ist

$$C = \frac{1}{l}\int_0^l (c(x)+p(x))dx > \frac{1}{l(D_c+D_p)} \int_0^l (D_c c(x)+D_p p(x))dx$$

$$= K/(D_c+D_p) \qquad \text{und}$$

$$K = \frac{1}{l} \int_0^l (D_c c(x)+D_p p(x))dx > \frac{1}{l}\int_0^l \left(\frac{D_p D_c}{D_c+D_p}c(x)+\frac{D_c D_p}{D_c+D_p}p(x)\right)dx$$

$$= D_c D_p/(D_c+D_p)\ C \ ;$$

deshalb ist $f(\mathbb{R}_+)=\mathbb{R}_+$. f^{-1} ist also auf $\mathbb{R}_+$ definiert, streng monoton und stetig.
Daher folgt aus 4.7 und 4.8 der

4.9 Satz

Es seien $l,k,\bar{k},D_s,D_c,D_p > 0$, $s_1\geq s_o\geq 0$. Dann hat das Randwertproblem (2) zu jedem $C\geq 0$ genau eine Lösung mit $s\geq 0$ und $1/l\int_0^l (c(x)+p(x))dx = C$. Für diese ist auch $c\geq 0$ und $p\geq 0$. s,c und p hängen bezüglich jeder C^n-Norm stetig von C ab; c,p und der Fluß $j = -(D_s s'+D_p p')$ hängen monoton von C ab. Strenge Monotonie gilt für $C\to c$; für $C\to p$, falls $s_1>0$ und für $C\to j$, falls $s_1>s_o$.

Aus Lemma 2 kann man noch weitere Eigenschaften der Lösung herleiten:

4.10 Korollar

Für die eindeutige nichtnegative Lösung des Randwertproblems (2) zu $C = 1/l\int_0^l (c(x)+p(x))dx$ gilt, falls $C>0$ und $s_1>s_o\geq 0$:
s und p sind streng monoton wachsend und c ist streng monoton fallend. s,c und p haben genau einen Wendepunkt in (0,l).

$$D_c c + D_p p =: K = \text{const}, \quad \min(D_c,D_p)C \leq K \leq \max(D_c,D_p)C$$

Für $x\in(0,l)$ ist $s_o < s(x) < s_1$,

$$\frac{K}{D_p}\,\frac{s_o}{\frac{D_c\bar{k}}{D_p\bar{k}}+s_o} < p(0) < p(x) < p(l) < \frac{K}{D_p}\,\frac{s_1}{\frac{D_c\bar{k}}{D_p\bar{k}}+s_1} \quad ,$$

$$\frac{\frac{\bar{k}}{D_p\bar{k}}\,K}{\frac{D_c\bar{k}}{D_p\bar{k}}+s_o} > c(0) > c(x) > c(l) > \frac{\frac{\bar{k}}{D_p\bar{k}}\,K}{\frac{D_c\bar{k}}{D_p\bar{k}}+s_1} \quad .$$

$$-j := D_s s' + D_p p' = \text{const} = D_s(s_1-s_o)/l + D_p(p(l)-p(0))/l$$

$$D_s\frac{s_1-s_o}{l} \leq -j \leq \frac{s_1-s_o}{l}\left(D_s + \frac{\frac{D_c\bar{k}}{D_p\bar{k}}\,K}{(\frac{D_c\bar{k}}{D_p\bar{k}}+s_o)(\frac{D_c k}{D_p\bar{k}}+s_1)}\right)$$

Falls $s_1=s_o$ oder $C=0$ ist die Lösung trivial:

$-j = D_s s' = D_s(s_1-s_o)/l$,

$$p = \frac{Cs}{\frac{\bar{k}}{\bar{k}}+s} = \text{const} \quad , \quad c = \frac{\bar{k}}{\bar{k}}\,\frac{C}{\frac{\bar{k}}{\bar{k}}+s} = \text{const} \quad .$$

II.5 Approximation der stationären Lösung

Aus der Abschätzung für den Fluß j in Korollar 4.10 sieht man, daß (erwartungsgemäß) eine wesentliche Erhöhung des reinen Diffusionsflusses $D_s(s_1-s_o)/l$ nur dann zu erwarten ist, wenn D_s klein ist und die Carrierkonzentration C nicht zu gering ist. Nun soll für den Fall einer sehr kleinen Diffusionsrate des Substrats ($D_s \ll D_c, D_p$) oder einer großen Konzentration von Trägermolekülen ($C \gg D_s\bar{k}/(D_p k)$) mithilfe der singulären Störungstheorie eine approximative Lösung berechnet werden.

Das Randwertproblem

$$D_s s'' = D_c c'' = -D_p p'' = ksc - \bar{k}p$$

$$(1) \qquad s(0) = s_o\ ,\ s(1) = s_1\ ,\ c'(0)=c'(1)=p'(0)=p'(1)=0$$

$$\frac{1}{l}\int_o^l (c(x)+p(x))dx = C$$

geht durch Einführung der dimensionslosen Größen

$$(2) \qquad \tilde{x}=x/l \quad \tilde{c}=c/C \quad \tilde{p}=p/C \quad \tilde{s}=sk/\bar{k} \quad \tilde{s}_o=s_o k/\bar{k} \quad \tilde{s}_1=s_1 k/\bar{k}$$

$$(3) \qquad \varepsilon = D_s\bar{k}/(D_p kC) \quad D = D_c/D_p \quad r = \bar{k}l^2/D_p$$

nach Weglassen der "~" über in

$$\varepsilon s'' = Dc'' = -p'' = r(sc-p) \quad \text{auf } (0,1)$$

$$(4) \qquad s(0)=s_o\ ,\ s(1)=s_1\ ,\ c'(0)=c'(1)=p'(0)=p'(1)=0$$

$$\int_o^1 (c(x)+p(x))dx = 1$$

OBdA sei $s_1 \geq s_o \geq 0$.

Für die weitere Betrachtung wird vorausgesetzt, daß

$\varepsilon \ll 1$, $r \not\ll 1$, $s_o, s_1 \not\ll 1$, $D \not\ll 1$, $D \not\ll 1$, d.h.

$$(5) \qquad D_s\bar{k}/(D_p kC) \ll 1,\ D_c \simeq D_p,\ s_1 \not\ll \bar{k}/k,\ \bar{k} \not\ll D_p/l^2$$

($a \not\ll 1$ bedeutet hier $a \leq O(1)$ für $\varepsilon \to 0$.)

Dies ist beispielsweise erfüllt, falls

$D_s \ll D_p \simeq D_c \simeq \bar{k}l^2$ und $s_1 \simeq \bar{k}/k \not\ll C$ oder

$s_1 \simeq \bar{k}/k \ll C$ und $D_s \gg D_c \simeq D_p \simeq \bar{k}l^2$.

Durch Integration folgt zunächst

$$K = p + Dc = \text{const}$$

(6) $$v = \varepsilon s + p \text{ linear, also } v(x) = v_o + \alpha(x-1/2)$$

$$\varepsilon s' + p' = \varepsilon s'(0) = \varepsilon s'(1) = \alpha$$

Dies führt auf die Randwertaufgabe

$$\varepsilon s'' = r\left(\frac{K-v+\varepsilon s}{D}s - v + \varepsilon s\right) =: rf_{K,v}(s);\ v(x) = v_o + \alpha(x-\tfrac{1}{2})$$

(7) $$s(0)=s_o\ ,\ s(1)=s_1\ ,\ \varepsilon s'(0)=\varepsilon s'(1)=\alpha$$

$$\varepsilon(D-1)\int_o^1 s(x)dx = (D-1)v_o + K - D$$

Da (4) genau eine nichtnegative Lösung hat, besitzt (7) genau eine Lösung (s,K,v_o,α) mit $s, v-\varepsilon s, K-v+\varepsilon s \geq 0$. Es sei stets diese Lösung gemeint, wenn von "der Lösung von (7)" die Rede ist. Für diese gilt offensichtlich

(8) $$\int_o^1 f_{K,v}(s)(x)dx = 0 \ .$$

Eine Näherung wird nun in der folgenden Weise gesucht: Das Intervall $[0,1]$ wird in drei Bereiche $I_1=[0,\delta_1]$, $I_2=[\delta_1,1-\delta_1]$, $I_3=[1-\delta_1,1]$ aufgeteilt, wobei

(9) $$\delta < \delta_1 < 1/2,\ \delta=o(\delta_1),\ \delta_1^2 = o(\delta) \text{ und } \delta^2 := \varepsilon$$

Im inneren Bereich I_2 sucht man die Näherung durch den Ansatz $\quad 0(\varepsilon) = \frac{K-v}{D}s - v = \frac{K-v}{D}s + K - v - K$

$$\Rightarrow \left(\frac{s}{D}+1\right)(K-v) = K + 0(\varepsilon) \quad \Rightarrow K-v \neq 0 \text{ für } \varepsilon \to 0\ , \ \Rightarrow$$

(10) $$s = \frac{Dv}{K-v} + 0(\varepsilon) = \frac{Dv_o}{K-v_o} + \frac{DK}{(K-v_o)^2}\alpha(x-\tfrac{1}{2}) + 0(\varepsilon) + 0(\alpha^2)$$

In I_1 löst man das Randwertproblem

$$\varepsilon s'' = rf_{K,v}(s)\ ,\ s(0)=s_o\ ,\ s(\delta_1) = \frac{Dv_o}{K-v_o} - \frac{DK}{(K-v_o)^2}\frac{\alpha}{2} + 0(\alpha^2) + 0(\alpha\delta_1) + 0(\varepsilon)$$

Nach der Transformation $x = \delta y$ führt dies auf

$$\frac{d^2s}{dy^2} = r\left(\frac{K-v(\delta y)}{D}\, s - v(\delta y)\right) = r\left(\frac{K-v_o+\frac{\alpha}{2}}{D}s - v_o+\frac{\alpha}{2}\right) + O(\delta_1\alpha)$$

$$s(0)=s_o\ ,\ \lim_{y\to\infty} s(y) = \frac{Dv_o}{K-v_o} - \frac{DK}{(K-v_o)^2}\,\frac{\alpha}{2} + O(\delta_1\alpha)+O(\alpha^2)+O(\varepsilon)$$

Die Lösung ist

$$s(y) = s_o e^{-\lambda_o y} + \left(\frac{Dv_o}{K-v_o} - \frac{DK}{(K-v_o)^2}\,\frac{\alpha}{2}\right)(1-e^{-\lambda_o y}) + O(\delta_1\alpha) + O(\alpha^2)+O(\varepsilon)$$

mit

$$\lambda_o^2 := \frac{r}{D}\,(K-v_o+\tfrac{\alpha}{2}) \tag{11}$$

oder nach der Rücktransformation

$$s(x) = s_o e^{-\lambda_o x/\delta} + \left(\frac{Dv_o}{K-v_o} - \frac{DK}{(K-v_o)^2}\,\frac{\alpha}{2}\right)(1-e^{-\lambda_o x/\delta}) + O(\delta_1\alpha)+O(\alpha^2)+O(\varepsilon) \tag{12}$$

Eine Näherung für α erhält man aus

$$\varepsilon s'(0) = \delta\lambda_o\left(\frac{Dv_o}{K-v_o} - \frac{DK}{(K-v_o)^2}\,\frac{\alpha}{2} - s_o\right) + O(\delta_1\alpha)+O(\alpha^2)+O(\varepsilon)$$

$$= \delta\lambda\left(\frac{Dv_o}{K-v_o} - s_o\right) + O(\delta\alpha)+O(\delta_1\alpha)+O(\alpha^2)+O(\varepsilon)$$

$$\varepsilon s'(1) = \delta\lambda\left(s_1 - \frac{Dv_o}{K-v_o}\right) + O(\delta\alpha)+O(\delta_1\alpha)+O(\alpha^2)+O(\varepsilon)$$

mit $\lambda^2 := \frac{r}{D}\,(K-v_o)$.

Daher ist $\alpha = \varepsilon(s'(1)+s'(0))/2 = O(\delta)$, $\Rightarrow$

$$\alpha = \frac{s_1-s_o}{2}\,\lambda\delta + O(\delta\delta_1) \tag{13}$$

Schließlich muß noch (8) ausgewertet werden, um K und v_o zu bestimmen.
In I_2 folgt aus (10) $\varepsilon s'' = O(\delta^3)$, und daher $f_{K,v}(s) = O(\delta^3)$. Damit erhält man aus (8)

$$0 = \int_o^1 f_{K,v}(s)\,dx = \left(\int_o^{\delta_1} + \int_{1-\delta_1}^1\right) f_{K,v}(s)\,dx + O(\delta^3) \tag{14}$$

Dabei ist der erste Summand

$$\int_o^{\delta_1} f_{K,v}(s)\,ds = \int_o^{\delta_1} \left(\frac{K-v+\varepsilon s}{D}\, s - v + \varepsilon s \right) ds$$

$$= \int_o^{\delta_1} \left(\frac{K-v}{D}\, s - v \right) ds + O(\delta_1 \varepsilon)$$

$$= \frac{K-v_o}{D} \int_o^{\delta_1} s(x)\,dx - v_o \delta_1 + \frac{\alpha}{2D} \int_o^{\delta_1} s(x)\,dx$$

$$+ \alpha \delta_1 / 2 + O(\delta_1^2 \delta)$$

Die entsprechende Berechnung von $\int_{1-\delta_1}^{1} f_{K,v}(s)\,ds$ ergibt

$$(15) \qquad \left(\int_o^{\delta_1} + \int_{1-\delta_1}^{1} \right) f_{K,v}(s)\,ds = \frac{K-v_o}{D} \left(\int_o^{\delta_1} + \int_{1-\delta_1}^{1} \right) s(x)\,dx$$

$$- \frac{\alpha}{2D} \left(\int_{1-\delta_1}^{1} - \int_o^{\delta_1} \right) s(x)\,dx - 2v_o \delta_1 + O(\delta_1^2 \delta)$$

Aus (12) folgt

$$\int_o^{\delta_1} s(x)\,dx = \frac{Dv_o}{K-v_o}\, \delta_1 - \frac{DK}{(K-v_o)^2}\, \frac{\alpha \delta_1}{2} + \left(s_o - \frac{Dv_o}{K-v_o} + \frac{DK}{(K-v_o)^2}\, \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\cdot \frac{\delta}{\lambda_o} \left(1 - e^{-\lambda_o \delta_1 / \delta} \right) + O(\delta_1^2 \delta)$$

Mit $\frac{1}{\lambda_o} = \left(\frac{r}{D} (K - v_o + \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1/2} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{\alpha}{2(K-v_o)} \right)^{-1/2}$

ist $= \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\alpha}{4(K-v_o)} \right) + O(\delta^2)$

$$\int_o^{\delta_1} s(x)\,dx = \frac{Dv_o}{K-v_o}\, \delta_1 - \frac{DK}{(K-v_o)^2}\, \frac{\alpha \delta_1}{2} + \left(s_o - \frac{Dv_o}{K-v_o} \right) \frac{\delta}{\lambda}$$

$$+ \frac{DK}{(K-v_o)^2}\, \frac{\alpha \delta}{2\lambda} - \left(s_o - \frac{Dv_o}{K-v_o} \right) \frac{1}{K-v_o}\, \frac{\alpha \delta}{4\lambda} + O(\delta_1^2 \delta)$$

$$+ O(\delta e^{-\delta_1 / \delta})$$

und entsprechend

$$\int_{1-\delta_1}^{1} s(x)\,dx = \frac{Dv_o}{K-v_o}\, \delta_1 + \frac{DK}{(K-v_o)^2}\, \frac{\alpha \delta_1}{2} + \left(s_1 - \frac{Dv_o}{K-v_o} \right) \frac{\delta}{\lambda}$$

$$- \frac{DK}{(K-v_o)^2}\, \frac{\alpha \delta}{2\lambda} + \left(s_1 - \frac{Dv_o}{K-v_o} \right) \frac{1}{K-v_o}\, \frac{\alpha \delta}{4\lambda} + O(\delta_1^2 \delta) + O(\delta e^{-\delta_1 / \delta})$$

Daher

$$\left(\int_{1-\delta_1}^{1} - \int_o^{\delta_1} \right) s(x)\,dx = (s_1 - s_o) \frac{\delta}{\lambda} + O(\delta_1 \delta) + O(\delta e^{-\delta_1 / \delta}) \quad \text{und}$$

$$(\int_0^{\delta_1}+\int_{1-\delta_1}^{1})s(x)dx = \frac{2Dv_o}{K-v_o}\delta_1 + (s_1+s_o-\frac{2Dv_o}{K-v_o})\frac{\delta}{\lambda}$$
$$+ \frac{s_1-s_o}{K-v_o}\frac{\alpha\delta}{4\lambda} + O(\delta_1^2\delta) + O(\delta e^{-\delta_1/\delta})$$

Aus (14) und (15) folgt damit

$$0 = \int_0^1 f_{K,v}(s)ds = \frac{K-v_o}{D}\Big(\frac{2Dv_o}{K-v_o}\delta_1 + (s_1+s_o-\frac{2Dv_o}{K-v_o})\frac{\delta}{\lambda}$$
$$+ \frac{s_1-s_o}{K-v_o}\frac{\alpha\delta}{4\lambda}\Big)$$
$$- 2v_o\delta_1 - (s_1-s_o)\frac{\alpha\delta}{2D\lambda} + O(\delta_1^2\delta) + O(\delta e^{-\delta_1/\delta})$$
$$= 2\frac{K-v_o}{D}(\frac{s_1+s_o}{2} - \frac{Dv_o}{K-v_o})\frac{\delta}{\lambda} - \frac{s_1-s_o}{4D}\frac{\alpha\delta}{\lambda} + O(\delta_1^2\delta)$$
$$+ O(\delta e^{-\delta_1/\delta})$$

$$0 = \frac{s_o+s_1}{2} - \frac{Dv_o}{K-v_o} - \frac{s_1-s_o}{8(K-v_o)}\alpha + O(\delta_1^2) + O(e^{-\delta_1/\delta})$$
$$= \frac{s_o+s_1}{2} - \frac{v_o}{1-v_o} - \frac{s_1-s_o}{8D(1-v_o)}\alpha + O(\delta_1^2) + O(e^{-\delta_1/\delta}),$$

denn aus (7) folgt $K-v_o = D(1-v_o) + O(\varepsilon)$

Auflösung der letzten Gleichung nach v_o liefert

$$(16) \qquad v_o = \frac{\frac{s_o+s_1}{2}}{1+\frac{s_o+s_1}{2}} - \frac{s_1-s_o}{8D(1+\frac{s_o+s_1}{2})}\alpha + O(\delta_1^2)$$

da für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ $O(e^{-\delta_1/\delta}) = O(\frac{\delta^n}{\delta_1^n}) = O(\delta_1^2)$.

$$\Rightarrow K = D + (1-D)v_o + O(\varepsilon)$$

$$(17) \qquad = \frac{D + \frac{s_o+s_1}{2}}{1+\frac{s_o+s_1}{2}} + \frac{D-1}{8D}\frac{s_1-s_o}{1+\frac{s_o+s_1}{2}}\alpha + O(\delta_1^2)$$

$$(18) \qquad \lambda^2 = \frac{r}{D}(K-v_o) = r(1-v_o)+O(\varepsilon) = \frac{r}{1+\frac{s_o+s_1}{2}} + O(\delta)$$

Schließlich führt (13) zu

$$(19) \qquad \alpha = \frac{s_1-s_o}{2}\lambda\delta + O(\delta_1\delta) = \left(\frac{r}{1+\frac{s_o+s_1}{2}}\right)^{1/2}\frac{s_1-s_o}{2}\delta + O(\delta_1\delta)$$

Diese Überlegungen legen den folgenden Satz nahe:

5.1 Satz

Sei (s,K,v_o,α) die Lösung von (7). Dann gilt

$$(20)\begin{cases} K=\underline{K}+o(\delta), \ \underline{K}= \dfrac{D+\frac{s_o+s_1}{2}}{1+\frac{s_o+s_1}{2}} + \dfrac{D-1}{16D}\dfrac{r^{1/2}}{(1+\frac{s_o+s_1}{2})^{3/2}}(s_1-s_o)\delta \\ v_o=\underline{v}_o+o(\delta), \ \underline{v}_o= \dfrac{\frac{s_o+s_1}{2}}{1+\frac{s_o+s_1}{2}} - \dfrac{1}{16D}\dfrac{r^{1/2}}{(1+\frac{s_o+s_1}{2})}\dfrac{3}{2}(s_1-s_o)^2\delta \\ \alpha = \underline{\alpha}+o(\delta), \ \underline{\alpha} = \left(\dfrac{r}{1+\frac{s_o+s_1}{2}}\right)^{1/2}\dfrac{s_1-s_o}{2}\delta \end{cases}$$

$$(21)\begin{cases} s = \underline{s} + o(\delta) \quad (\text{d.h. } \sup_{0\le x\le 1}|s(x)-\underline{s}(x)| = o(\delta) \\ \underline{s}(x)= \begin{cases} s_o e^{-\underline{\lambda}_o x/\delta} + \left(\dfrac{D\underline{v}_o}{\underline{K}-\underline{v}_o} - \dfrac{D\underline{K}}{(\underline{K}-\underline{v}_o)^2}\dfrac{\underline{\alpha}}{2}\right)(1-e^{-\underline{\lambda}_o x/\delta}), & x\in I_1 \\ \dfrac{D\underline{v}_o}{\underline{K}-\underline{v}_o} + \dfrac{D\underline{K}}{(\underline{K}-\underline{v}_o)^2}\underline{\alpha}(x-\frac{1}{2}), & x\in I_2 \\ s_1 e^{-\underline{\lambda}_1\frac{1-x}{\delta}} + \left(\dfrac{D\underline{v}_o}{\underline{K}-\underline{v}_o} + \dfrac{D\underline{K}}{(\underline{K}-\underline{v}_o)^2}\dfrac{\underline{\alpha}}{2}\right)(1-e^{-\underline{\lambda}_1\frac{1-x}{\delta}}), & x\in I_3 \end{cases} \end{cases}$$

(22) mit $\underline{\lambda}^2_{o/1} = \dfrac{r}{D}(\underline{K} - \underline{v}_o \pm \underline{\alpha}/2)$

5.2 Folgerung

Sei (s,c,p) die nichtnegative Lösung von (4). Dann ist

$$s = \underline{s} + o(\delta) \qquad \alpha = \underline{\alpha} + o(\delta)$$
$$p = \underline{v}_o + \underline{\alpha}(x-\tfrac{1}{2}) + o(\delta)$$
$$c = \frac{1}{D}\,(\underline{K} - \underline{v}_o - \underline{\alpha}(x-\tfrac{1}{2})) + o(\delta)$$

Für die Lösung von (1) erhält man durch die Rücktransformation (2), daß der Fluß des Substrats durch die Membran gegeben ist durch

$$-j = \left(\frac{D_s \bar{k} C}{\frac{\bar{k}}{k} + \frac{s_o+s_1}{2}}\right)^{1/2} \frac{s_1-s_o}{2} \quad .$$

Der Fluß ist in diesem Grenzfall also unabhängig von der Membrandicke 1 und den Diffusionskonstanten des Carriers D_c und D_p. Der limitierende Schritt liegt an der Oberfläche.

Beweis von Satz 5.1: Sei

$$(23)\quad \underline{s}(x) = \begin{cases} \underline{s}_1(x) = s_o e^{-\lambda_o x/\delta} + \left(\frac{Dv_o}{K-v_o} - \frac{DK}{(K-v_o)^2}\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (1 - e^{-\lambda_o x/\delta}) \;, & x \in I_1 \\ \underline{s}_2(x) = \frac{Dv_o}{K-v_o} + \frac{DK}{(K-v_o)^2}\,\alpha(x-\tfrac{1}{2}) \;, & x \in I_2 \\ \underline{s}_3(x) = s_1 e^{-\lambda_1 \frac{1-x}{\delta}} + \left(\frac{Dv_o}{K-v_o} + \frac{DK}{(K-v_o)^2}\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (1 - e^{-\lambda_1 (1-x)/\delta}), & x \in I_3 \end{cases}$$

Dabei ist (s,K,v_o,α) die Lösung von (7) und

$$(11)\quad \lambda_o^2 = \frac{r}{D}\,(K - v_o + \frac{\alpha}{2}) \;, \quad \lambda_1^2 = \frac{r}{D}\,(K - v_o - \frac{\alpha}{2}) \;.$$

Da gemäß (7)

$$\frac{K-v_o}{D}\int_o^1 s(x)dx - \frac{\alpha}{D}\int_o^1 (x-\frac{1}{2})s(x)dx - v_o + \varepsilon\int_o^1 (1+\frac{s}{D})sdx = 0$$

folgt

$$K-v_o = \frac{1}{\int_o^1 s(x)dx + D}\left(DK + \alpha\int_o^1 (x-\frac{1}{2})s(x)dx - \varepsilon\int_o^1 (s+D)sdx \right)$$

$$\geq \frac{DK}{\int_o^1 s(x)dx + D} - O(\varepsilon) \text{ , da nach Korollar 4.11}$$

$\alpha \geq 0$ und die Lösung s monoton wachsend ist. Aus $K = p+Dc = \int_o^1 (p(x)+Dc(x))dx \geq \min(1,D)$ folgt schließlich $\frac{1}{K-v_o} = O(1)$.

$\underline{s}$ ist an den Stellen $x=\delta_1$ und $x=1-\delta_1$ nicht glatt. $\tilde{s}$ sei eine geglättete Funktion, die zum Beispiel auf die folgende Weise definiert sei:

$$\tilde{s}(x) = \mu_1(x)\underline{s}_1(x) + \mu_2(x)\underline{s}_2(x) + \mu_3(x)\underline{s}_3(x) \tag{24}$$

$$\text{mit } \mu_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\delta_1^4}{\delta_1 - x} + \delta_1^3} & , x<\delta_1 \\ 0 & , x\geq\delta_1 \end{cases}$$

$$\mu_3(x) = \mu_1(1-x)$$

$$\mu_2 = 1 - \mu_1 - \mu_3$$

Damit ist $\tilde{s}(x) = \underline{s}(x)$ für $x\in I_2=[\delta_1, 1-\delta_1]$, und für $x\in I_1=[0,\delta_1]$:

$$\tilde{s}(x)-\underline{s}(x) = (\mu_1(x)-1)\underline{s}_1(x) + \mu_2(x)\underline{s}_2(x)$$
$$= (1-\mu_1(x))(\underline{s}_2(x)-\underline{s}_1(x))$$

$$= (1 - e^{-\frac{\delta_1^4}{\delta_1 - x} + \delta_1^3})\left((\frac{Dv_o}{K-v_o} - s_o)e^{-\frac{\lambda_o x}{\delta}} + \frac{DK\alpha x}{(K-v_o)^2} - \frac{DK\alpha/2}{(K-v_o)^2} e^{-\frac{\lambda_o x}{\delta}} \right)$$

Die beiden Faktoren werden abgeschätzt durch

$$1 - \exp(-\frac{\delta_1^4}{\delta_1 - x} + \delta_1^3) \leq \frac{\delta_1^4}{\delta_1 - x} - \delta_1^3 = \frac{\delta_1^2 x}{1 - \frac{x}{\delta_1}} \leq \frac{\delta_1^2 \delta_2}{1 - \delta_2/\delta_1}$$

für $x \leq \delta_2 < \delta_1$

$$\left| \left(\frac{Dv_o}{K - v_o} - s_o - \frac{DK\alpha/2}{(K-v_o)^2}\right) e^{-\lambda_o x/\delta} + \frac{DK\alpha x}{(K-v_o)^2} \right|$$

$$\leq \text{const } ((\delta/x)^n + \alpha x) \leq \text{const } ((\delta/\delta_2)^n + \alpha\delta_1)$$

für $\delta_2 \leq x \leq \delta_1$ und $n>0$.
Mit geeigneter Wahl von δ_2 so, daß $\delta_2 = o(\delta_1)$, $\delta_2 = O(\delta/\delta_1)$ und $(\delta/\delta_2)^n = O(\delta\delta_1)$ (z.B. durch $\delta_1 = \delta^\beta$, $\delta_2 = \delta^\gamma$, $1/2<\beta<\gamma<1$ und $n \geq (1+\beta)/(1-\gamma)$) folgt

(25) $\quad |\tilde{s}(x) - \underline{s}(x)| \leq \text{const } (\delta\delta_1 + \alpha\delta_1)$ für $x \in I_1$

und entsprechend für $x \in I_3$.

Um zu zeigen, daß $\tilde{s}$ die Lösung s approximiert, soll der folgende Satz angewendet werden (Theorem 6.2.3.6 zusammen mit einer Bemerkung auf Seite 242 in [16]):

5.2 Satz

Sei $L_\varepsilon = \varepsilon a(x,\varepsilon)\frac{d^2}{dx^2} + b(x,\varepsilon)\frac{d}{dx} + c(x,\varepsilon)$

eine Familie von elliptischen Operatoren auf einem Intervall (OBdA (0,1)) mit $a(x,\varepsilon) = \bar{a} > 0$ für alle x,ε

$\sup_{0\leq x\leq 1} a(x,\varepsilon) = O(1)$, $\sup_{0\leq x\leq 1} |b(x,\varepsilon)| = O(\sqrt{\varepsilon})$ und

$\sup_{0\leq x\leq 1} |c(x,\varepsilon)| = O(1)$ für $\varepsilon \to 0$; $c \leq 0$.

Für die Lösungen der linearen Randwertprobleme $L_\varepsilon u = f$, $u(0)=u(1)=0$ gilt

(26) $\quad \|u\|_{C} + \sqrt{\varepsilon}\|u\|_{C^1} + \varepsilon\|u\|_{C^2} \leq \text{const } \|f\|_{C}$

Fortsetzung des Beweises von Satz 5.1:
Aus Satz 5.2 folgt für die Lösung s von (7):

$\|s\|_C + \varepsilon^{1/2}\|s\|_{C^1} + \varepsilon\|s\|_{C^2} = O(1)$, daher insbesondere
$\alpha = \varepsilon s'(0) = \varepsilon s'(1) = O(\delta)$.
Im nächsten Schritt soll mithilfe von (26) $\tilde{s}$-s abgeschätzt werden. $\tilde{s}$ ist differenzierbar, und

$$(27)\qquad \tilde{s}' = \begin{cases} \mu_1'(\underline{s}_1-\underline{s}_2) + \mu_1(\underline{s}_1'-\underline{s}_2') + \underline{s}'_2 & \text{auf } I_1 \\ \underline{s}_2' & \text{auf } I_2 \\ \mu_3'(\underline{s}_3-\underline{s}_2) + \mu_3(\underline{s}_3'-\underline{s}_2') + \underline{s}_2' & \text{auf } I_3 \end{cases}$$

Am Rand erhält man $\tilde{s}'(0) = -\delta_1^2(\underline{s}_1(0)-\underline{s}_2(0))+\underline{s}_1'(0)$

$$(28)\qquad \begin{aligned} \varepsilon\tilde{s}'(0) &= \varepsilon\underline{s}_1'(0) + O(\varepsilon\delta_1^2) \\ \varepsilon\tilde{s}'(1) &= \varepsilon\underline{s}_3'(1) + O(\varepsilon\delta_1^2) \end{aligned}$$

und durch eine weitere Differentiation von (27)

$$(29)\qquad \tilde{s}'' = \begin{cases} \mu_1''(\underline{s}_1-\underline{s}_2) + 2\mu_1'(\underline{s}_1'-\underline{s}_2') + \mu_1\underline{s}_1'' + (1-\mu_1)\underline{s}_2'' & \text{auf } I_1 \\ \underline{s}_2'' \quad \text{auf } I_2 & \\ \mu_3''(\underline{s}_3-\underline{s}_2) + 2\mu_3'(\underline{s}_3'-\underline{s}_2') + \mu_3\underline{s}_3'' + (1-\mu_3)\underline{s}_2'' & \text{auf } I_3 \end{cases}$$

Für $0 \le x \le \delta_2 = o(\delta_1)$ ist

$1-\mu_1 = O(\delta_1^2\delta_2)$, $\mu_1'(x) = -\dfrac{\delta_1^4}{(\delta_1-x)^2}\exp(-\dfrac{\delta_1^4}{\delta_1-x}+\delta_1^3) = O(\delta_1^2)$

$\mu_1''(x) = \left(-\dfrac{2\delta_1^4}{(\delta_1-x)^3} + \dfrac{\delta_1^8}{(\delta_1-x)^4}\right)\exp(-\dfrac{\delta_1^4}{\delta_1-x}+\delta_1^3) = O(\delta_1)$

und für $\delta_2 \le x \le \delta_1$

$|\underline{s}_2(x)-\underline{s}_1(x)| = O((\delta/\delta_2)^n + \delta\delta_1) = O(\delta\delta_1)$

$|\underline{s}_2'(x)-\underline{s}_1'(x)| = |-\dfrac{\lambda_o}{\delta}(\dfrac{Dv_o}{K-v_o}-s_o-\dfrac{DK\alpha/2}{(K-v_o)^2})e^{-\lambda_o x/\delta} + \dfrac{DK\alpha}{(K-v_o)^2}|$

$= O(\delta^n/\delta_2^{n+1}) + O(\delta) = O(\delta\delta_1/\delta_2+\delta) = O(\delta_1)$

$$|\underline{s}_2''(x)-\underline{s}_1''(x)| = |-\frac{\lambda_o}{\delta^2}(\frac{Dv_o}{K-v_o} - s_o - \frac{DK\alpha/2}{(K-v_o)^2})\, e^{-\lambda_o x/\delta}|$$

$$= O(\delta^{2n}/\delta_2^{2n+2}) = O((\delta\delta_1/\delta_2)^2) = O(\delta_1^2)$$

Entsprechendes gilt auf I_3, so daß aus (29) folgt

(30) $$\sup_{0\le x\le 1} |\tilde{s}''(x) - \underline{s}''(x)| = O(\delta_1) .$$

Nach Konstruktion ist auf I_2 $\underline{s}''=0$ und

$$f_{K,v}(\underline{s}) = \frac{K-v}{D}\,\underline{s} - v = O(\varepsilon) \; ; \quad \text{und für } x\in I_1$$

$$\varepsilon\underline{s}''(x) = (s_o - \frac{Dv_o}{K-v_o} + \frac{DK\alpha/2}{(K-v_o)^2})\,\lambda_o^2\, e^{-\lambda_o x/\delta}$$

$$= \lambda_o^2 \underline{s}(x) - (\frac{Dv_o}{K-v_o} - \frac{DK\alpha/2}{(K-v_o)^2})\,\lambda_o^2$$

$$= \frac{r}{D}(K - v_o + \alpha/2)\underline{s}(x) - rv_o + r\alpha/2 + O(\varepsilon)$$

$$= r(\frac{K-v}{D}\,\underline{s}(x) - v(x)) + O(\delta\delta_1) = rf_{K,v}(\underline{s}) + O(\delta\delta_1)$$

Dasselbe gilt auf I_3 und daher auf dem ganzen Intervall

(31) $$\varepsilon\underline{s}'' = rf_{K,v}(\underline{s}) + O(\delta\delta_1) .$$

Da $f_{K,v}$ lipschitzstetig ist, folgt aus (25),(30) und(31)

(32) $$\varepsilon\tilde{s}'' = rf_{K,v}(\tilde{s}) + O(\delta\delta_1) .$$

Weil für die Lösung s von (7) natürlich $\varepsilon s''=rf_{K,v}(s)$, ist

$$|(\varepsilon\tilde{s}'' - \varepsilon s'') - r(f_{K,v}(\tilde{s}) - f_{K,v}(s))|$$

$$= |\varepsilon(\tilde{s}-s)' - r\tfrac{K-v}{D}(\tilde{s}-s)| + O(\varepsilon) = O(\delta\delta_1) .$$

Aus Satz 2 folgt damit

(33) $$\|\tilde{s}-s\|_C + \delta\|\tilde{s}-s\|_{C^1} + \delta^2\|\tilde{s}-s\|_{C^2} = O(\delta\delta_1) ,$$

insbesondere

$$(34)\quad \begin{cases} \|\underline{s}-s\|_C = \|\tilde{s}-s\|_C + O(\delta\delta_1) = O(\delta\delta_1) \\ \varepsilon\underline{s}'(0) = \varepsilon\tilde{s}'(0) + O(\varepsilon\delta_1^2) = \varepsilon s'(0) + O(\varepsilon\delta_1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \alpha + O(\varepsilon\delta_1) \\ \varepsilon\underline{s}'(1) = \varepsilon s'(1) + O(\varepsilon\delta_1) = \alpha + O(\varepsilon\delta_1) \end{cases}$$

Die Approximation $\underline{s}$ enthält noch die bisher unbekannten Konstanten K, v_o und α . Es soll nun gezeigt werden, daß sie gemäß (20) durch $\underline{K}, \underline{v}_o$ und $\underline{\alpha}$ approximiert werden. Für α ist nach (34)

$$\alpha = \varepsilon\underline{s}'(0) + O(\varepsilon\delta_1) = \delta\lambda_o\left(\frac{Dv_o}{K-v_o} - \frac{DK\alpha/2}{(K-v_o)^2} - s_o\right) + O(\varepsilon\delta_1) = O(\delta)$$

$$\alpha = \delta\lambda\left(\frac{Dv_o}{K-v_o} - s_o\right) + O(\varepsilon) \quad ; \text{ entsprechend}$$

$$\alpha = \delta\lambda\left(s_1 - \frac{Dv_o}{K-v_o}\right) + O(\varepsilon) \qquad \Rightarrow \quad \alpha = \delta\lambda\,\frac{s_1-s_o}{2} + O(\varepsilon)$$

$\lambda^2 = \frac{r}{D}(K - v_o)$ ist ebenfalls noch unbekannt. Aus (8)

folgt $$0 = \int_0^1 f_{K,v}(s)dx = \left(\int_0^{\delta_1} + \int_{1-\delta_1}^1\right) f_{K,v}(s)dx + \frac{\varepsilon}{r}\int_{\delta_1}^{1-\delta_1} s''(x)dx$$

$$\int_{\delta_1}^{1-\delta_1} s''(x)dx = s'(1-\delta_1) - s'(\delta_1)$$

$$= \tilde{s}'(1-\delta_1) - \tilde{s}'(\delta_1) + O(\delta_1) \quad \text{wegen (33)}$$

$$= \int_{\delta_1}^{1-\delta_1} \tilde{s}''(x)dx + O(\delta_1)$$

$$= \int_{I_2} \underline{s}''(x)dx + O(\delta_1) = O(\delta_1) \quad (29)\text{u.}(23)$$

$$\Rightarrow\quad 0 = \int_{I_1+I_3} f_{K,v}(s)dx + O(\varepsilon\delta_1)$$

$$= \int_{I_1+I_3} f_{K,v}(\underline{s})dx + O(\delta\delta_1^2) \quad \text{nach (34)}$$

$$= \int_{I_1+I_3}\left(\frac{K-v}{D}\,\underline{s} - v\right)dx + O(\delta\delta_1^2)$$

$$= 2\frac{K-v_o}{D}\left(\frac{s_1+s_o}{2} - \frac{Dv_o}{K-v_o}\right)\frac{\delta}{\lambda} - \frac{s_1-s_o}{4D}\,\frac{\alpha\delta}{\lambda} + O(\delta\delta_1^2) + O(\delta e^{-\frac{\delta_1}{\delta}})$$

nach (23)

Löst man nun die letzte Gleichung nach v_o auf, so erhält man

$$v_o = \frac{(s_o+s_1)/2 + \alpha(s_1-s_o)/8D}{1 + (s_o+s_1)/2} + O(\delta_1^2) = \underline{v}_o + O(\delta_1^2)$$

und mit der letzten Gleichung von (7) die übrigen Aussagen von (20):

$$K = D + (1-D)v_o + O(\varepsilon) = \underline{K} + O(\delta_1^2)$$

$$\lambda^2 = \frac{r}{D}(K-v_o) = r(1-v_o) + O(\varepsilon) = r\left(1+\frac{s_o+s_1}{2}\right)^{-1} + O(\delta) = \underline{\lambda}^2 + O(\delta)$$

$$\alpha = \frac{s_1-s_o}{2}\lambda\delta + O(\varepsilon) = \left(\frac{r}{1+\frac{s_o+s_1}{2}}\right)^{1/2}\frac{s_1-s_o}{2}\delta + O(\varepsilon) = \underline{\alpha} + O(\varepsilon)$$

$$\lambda_{o/1}^2 = \frac{r}{D}(K-v_o \pm \alpha/2) = \frac{r}{D}(\underline{K}-\underline{v}_o \pm \underline{\alpha}/2) + O(\delta_1^2) = \underline{\lambda}_{o/1}^2 + O(\delta_1^2)$$

Damit ist für $x \in I_1$

$$\left|e^{-\lambda_o x/\delta} - e^{-\underline{\lambda}_o x/\delta}\right| = \begin{cases} e^{-\lambda_o x/\delta}\left(1 - e^{-(\underline{\lambda}_o-\lambda_o)x/\delta}\right), & \underline{\lambda}_o \geq \lambda_o \\ e^{-\underline{\lambda}_o x/\delta}\left(1 - e^{-(\lambda_o-\underline{\lambda}_o)x/\delta}\right), & \underline{\lambda}_o \leq \lambda_o \end{cases}$$

$$\leq e^{-\min(\lambda_o,\underline{\lambda}_o)x/\delta} \cdot \frac{|\lambda_o-\underline{\lambda}_o|}{\delta} x$$

$$\leq \text{const}\,|\lambda_o - \underline{\lambda}_o| = O(\delta_1^2) \quad \Rightarrow$$

$$\underline{s}(x) = s_o e^{-\lambda_o x/\delta} + \left(\frac{Dv_o}{K-v_o} - \frac{DK\alpha/2}{(K-v_o)^2}\right)\left(1 - e^{-\lambda_o x/\delta}\right)$$

$$= s_o e^{-\underline{\lambda}_o x/\delta} + O(\delta_1^2) + \left(\frac{D\underline{v}_o}{\underline{K}-\underline{v}_o} - \frac{DK\underline{\alpha}/2}{(\underline{K}-\underline{v}_o)^2} + O(\delta_1^2)\right)\left(1 - e^{-\underline{\lambda}_o x/\delta} + O(\delta_1^2)\right)$$

$$= \underline{s}(x) + O(\delta_1^2)$$

Entsprechend gilt auf I_3 $\underline{s} = \underline{\underline{s}} + O(\delta_1^2)$, und auf I_2

$$\underline{s}(x) = \frac{Dv_o}{K-v_o} + \frac{DK\alpha}{(K-v_o)^2}\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{D\underline{v}_o}{\underline{K}-\underline{v}_o} + \frac{DK\underline{\alpha}}{(\underline{K}-\underline{v}_o)^2}\left(x-\frac{1}{2}\right) + O(\delta_1^2)$$

$$= \underline{\underline{s}}(x) + O(\delta_1^2)$$

Zusammenfassend ist mit (34)

gleichmäßig auf $[0,1]$ $\quad s = \underline{s} + O(\delta\delta_1) = \underline{\underline{s}} + O(\delta_1^2)$ $\square$

II.6 Stabilität

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß die stationäre Lösung des Systems von parabolischen Differentialgleichungen

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\dot{s} &= D_s s'' + \bar{k}p - ksc \qquad s(0)=s_0 \quad s(1)=s_1\\
\dot{c} &= D_c c'' + \bar{k}p - ksc \qquad c'(0)=c'(1)=0\\
\dot{p} &= D_p p'' - \bar{k}p + ksc \qquad p'(0)=p'(1)=0\\
&\frac{1}{l}\int_0^l (c+p)dx = C
\end{aligned}
$$

für bestimmte Parameterbereiche in einem noch zu präzisierenden Sinne stabil ist.
Zunächst müssen die Lösungen des zu (1) gehörigen Anfangswertproblems global abgeschätzt werden. Daß globale Schranken existieren, wurde bereits in II.3 gezeigt, jedoch sind diese zu allgemein, um die Abhängigkeit der Schranken von den Parametern aufzuzeigen. Deshalb sollen hier zunächst noch einmal explizite Schranken für diesen Spezialfall ausgerechnet werden.
Sei (s,c,p) eine Lösung von (1) zu nichtnegativen Anfangsdaten s_0, c_0, p_0, die in $L^\infty((0,1))$ liegen. Die folgenden Bezeichnungen werden verwendet:

$\|s_0\|_\infty = \sup\{s_0(x) \mid 0<x<1\}$

$S_0 = \max(\|s_0\|_\infty, s_1)$ (Dabei sei oBdA $s_1 \geq s_0 \geq 0$)

$C_0 = \|c_0\|_\infty$, $P_0 = \|p_0\|_\infty$,

$C = \frac{1}{l}\int_0^l (c_0(x)+p_0(x))dx = \frac{1}{l}\int_0^l (c(x,t)+p(x,t))dx$

"mittlere Carrierdichte"

s,c und p sind jeweils als Summe von zwei Funktionen darstellbar, von denen eine eine lineare Differentialgleichung mit inhomogenen Anfangs- und Randdaten erfüllt und die andere die nichtlineare Gleichung mit homogenen Anfangs- und Randbedingungen.

So läßt sich s zerlegen in $s = s^o + s^1$ mit

$\dot{s}^o = D_s s^o{}''$, $s^o(0,t)=s_o$, $s^o(1,t)=s_1$, $s^o(x,0)=s_o(x)$

$\dot{s}^1 = D_s s^1{}'' + \bar{k}p - ksc$, $s^1(0,t)=s^1(1,t)=0$, $s^1(x,0)=0$

Dann folgt aus dem Maximumprinzip

(2) $\quad 0 \leq s^o(x,t) \leq s_o$ für alle $(x,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}_+$

Mithilfe der Greenschen Funktion $G(x,\xi,t) \geq 0$ zum Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial t} - D_s\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ mit Dirichlet-Randbedingungen kommt man zu folgender Abschätzung von s^1:

$$s^1(x,t) = \int_o^t \int_o^1 G(x,\xi,\tau)(\bar{k}p(\xi,t-\tau)-ks(\xi,t-\tau)c(\xi,t-\tau))d\xi\, d\tau$$

$$\leq \bar{k}\int_o^t \int_o^1 G(x,\xi,\tau)p(\xi,t-\tau)d\xi d\tau$$

$$= \bar{k}\int_o^t \int_o^1 \frac{2}{1}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_s(\pi/1)^2n^2\tau} \sin\frac{n\pi x}{1}\sin\frac{n\pi\xi}{1}\, p(\xi,t-\tau)\, d\xi d\tau$$

$$\leq \frac{2\bar{k}}{1}\int_o^t\int_o^1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_s(\pi/1)^2n^2\tau} p(\xi,t-\tau)\, d\xi d\tau$$

$$\leq \frac{2\bar{k}}{1}\sup\{\int_o^1 p(\xi,\tau)d\xi \mid 0\leq\tau\leq t\}\sum_{n=1}^{\infty}\int_o^t e^{-D_s(\pi/1)^2n^2\tau} d\tau$$

(da alles positiv ist, lassen sich Integrationen und Summationen miteinander vertauschen)

$$\leq \frac{2\bar{k}}{1}\, C1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2}{D_s\pi^2n^2} = 2\bar{k}C\frac{1^2}{D_s\pi^2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\bar{k}C1^2}{3D_s}$$

Damit ergibt sich für s

(3) $\quad s(x,t) \leq s_o + \frac{\bar{k}C1^2}{3D_s}$ für alle $x\in[0,1]$, $t\geq 0$.

Entsprechend wird c abgeschätzt: Aus

$\dot{c} - D_c c'' + \bar{k}c = \bar{k}(c+p) - ksc$ und einer zugehörigen Zerlegung $c = c^o + c^1$ folgt

$c^o(x,t) \leq c_o e^{-\bar{k}t}$ und

$$c^1(x,t) \leq \int_o^t \int_o^1 e^{-\bar{k}\tau}\left(\frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_c(\pi/l)^2 n^2 \tau} \cos\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi\xi}{l}\right) \cdot \bar{k}(c(\xi,t-\tau)+p(\xi,t-\tau)) \, d\xi d\tau$$

$$\leq \bar{k}C \left(\frac{1}{\bar{k}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{k} + D_c(\pi/l)^2 n^2} \right)$$

$$\leq C \left(1 + 2 \int_o^{\infty} \frac{1}{1+(D_c/\bar{k})(\pi/l)^2 x^2} \, dx \right)$$

$$= C \left(1 + (\bar{k}/D_c)^{1/2} l\right)$$

$$c(x,t) \leq c_o + C \left(1 + (\bar{k}/D_c)^{1/2} l\right) \tag{4}$$

Analog folgt für p aus $\dot{p} - D_p p'' + \bar{k}p = ksc$, $p = p^o + p^1$

$$p^o(x,t) \leq p_o e^{-\bar{k}t}$$

$$p^1(x,t) \leq k\left(\frac{1}{\bar{k}l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{k} + D_p(\pi/l)^2 n^2}\right) \sup_{0\leq\tau\leq t} \int_o^1 s(\xi,\tau)c(\xi,\tau) \, d\xi$$

$$\leq k\left(\frac{1}{\bar{k}l} + (D_p\bar{k})^{-1/2} l\right) \sup_{0\leq\tau\leq t} \|s(.,\tau)\|_{\infty} \|c(.,\tau)\|_1$$

$$\leq C \frac{k}{\bar{k}} \left(1 + (\bar{k}/D_p)^{1/2} l\right) \left(S_o + \frac{\bar{k}Cl^2}{3D_s}\right)$$

$$p(x,t) \leq p_o + \frac{k}{\bar{k}}(1+(\bar{k}/D_p)^{1/2} l) C S_o + \frac{kl^2}{3D_s}(1+(\bar{k}/D_p)^{1/2} l) C^2 \tag{5}$$

Eine weitere Abschätzung für p erhält man aus einer anderen Zerlegung $p = p^o + p^1 + p^2$ mit

$\dot{p}^o = D_p p^{o}{}''$, $p^o(x,0) = p_o(x)$

$\dot{p}^1 + \dot{p}^2 = D_p(p^1+p^2)'' + \bar{k}p - ksc$, $p^1(x,0)=p^2(x,0)=0$

wobei $p^1(x,t) = p^1(t) := \frac{1}{l}\int_o^1 (p(\xi,t)-p^o(\xi,t))d\xi$

$$\leq C - \frac{1}{l}\|p_o\|_1 = \frac{1}{l}\|c_o\|_1 \leq C$$

Aus $p'(0,t)=p'(1,t)=p^o{}'(0,t)=p^o{}'(1,t)=0$ folgt $\dot{p}^1(t) = \frac{-1}{l}\int_0^l(\bar{k}p(\xi,t)-ks(\xi,t)c(\xi,t))d\xi$, und daher erfüllt p^2 die Differentialgleichung

$$\dot{p}^2 = D_p p^{2"} + ksc - \bar{k}p + \frac{1}{l}\int_0^l (\bar{k}p(\xi,t)-ks(\xi,t)c(\xi,t))d\xi$$

so daß sich p^2 abschätzen läßt durch

$$p^2(x,t) = \int_0^t\int_0^l \Big(\frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_p(\pi/l)^2n^2\tau}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\Big)$$
$$(ks(\xi,t-\tau)c(\xi,t-\tau)-\bar{k}p(\xi,t-\tau)$$
$$-\frac{1}{l}\int_0^l(ks(\eta,t-\tau)c(\eta,t-\tau)-\bar{k}p(\eta,t-\tau))d\eta)$$
$$d\xi d\tau$$

$$= \int_0^t\int_0^l \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_p(\pi/l)^2n^2\tau}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}$$
$$(\,ks(\xi,t-\tau)c(\xi,t-\tau) - \bar{k}p(\xi,t-\tau)\,)d\xi d\tau$$

$$\leq \int_0^t \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_p(\pi/l)^2n^2\tau} d\tau \sup_{0\leq\tau\leq t}(k\|s(.,\tau)\|_\infty\|c(.,\tau)\|_1 + \bar{k}\|p(.,\tau)\|_1) \tag{6}$$

$$\leq \frac{Cl^2}{3D_p}(\bar{k} + k\sup\{\|s(.,\tau)\|_\infty \mid 0\leq\tau\leq t\})$$

$$\leq (\bar{k}+kS_o)\frac{l^2C}{3D_p} + k\bar{k}\frac{l^4C^2}{9D_sD_p}$$

$$p(x,t) \leq P_o + C + (\bar{k}+kS_o)\frac{l^2}{3D_p}C + k\bar{k}\frac{l^4}{9D_pD_s}C^2 \tag{7}$$

Zusammenfassend erhält man

6.1 Lemma

Die Lösungen von Anfangsrandwertaufgaben (1) sind beschränkt durch Konstanten M_s, M_c und M_p:
$s \leq M_s(S_o,C,\bar{k},D_s/l^2)$, $c \leq M_c(C_o,C,\bar{k},D_c/l^2)$,
$p \leq M_p(P_o,S_o,C,k,\bar{k},D_p/l^2,D_s/l^2)$, wobei diese Schranken so gewählt werden können, daß sie monoton von S_o, C_o, P_o, $k, \bar{k}$, l^2/D_s, l^2/D_c, l^2/D_p abhängen.

Eine analoge Aussage kann man in L^2 formulieren:

6.2 Lemma

Die Lösungen der zu (1) gehörenden Anfangs-Randwertaufgaben sind in der folgenden Weise beschränkt:

$$l^{-1/2}\|s(.,t)\|_2 \le M_s(\tilde{S}_o, C, \bar{k}, D_s/l^2)$$

$$l^{-1/2}\|c(.,t)\|_2 \le M_c(\tilde{C}_o, C, \bar{k}, D_c/l^2)$$

$$l^{-1/2}\|p(.,t)\|_2 \le M_p(\tilde{P}_o, \tilde{S}_o, C, k, \bar{k}, D_p/l^2, D_s/l^2)$$

für alle $t \ge 0$, dabei ist

$$\tilde{S}_o := l^{-1/2}\|s_o\|_2 + (s_o+s_1)\ ,\quad \tilde{C}_o := l^{-1/2}\|c_o\|_2$$

$\tilde{P}_o := l^{-1/2}\|p_o\|_2$, wobei die Schranken bei geeigneter Wahl monoton von $\tilde{S}_o, \tilde{C}_o, \tilde{P}_o, C, k, \bar{k}, l^2/D_s, l^2/D_c, l^2/D_p$ abhängen.

Beweis: Die Operatoren $D_s\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $D_c\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $D_p\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ mit den zugehörigen homogenen Randbedingungen erzeugen auf L^2 Kontraktionshalbgruppen, so daß

$$\|c^o(.,t)\|_2 \le e^{-\bar{k}t}\|c_o\|_2\ ,\quad \|p^o(.,t)\|_2 \le \|p_o\|_2$$

(wobei die Lösungskomponenten s,c und p wie vorher zerlegt seien in $s = s^o+s^1$, $c = c^o+c^1$, $p=p^o+p^1+p^2$). Für s^o gilt $s^o(x,t) \le u(x)+v(x,t)$ mit

$u(x) = s_o + (s_1-s_o)x/l$ und

$$\dot{v} = D_s v'',\ v(0,t)=v(l,t)=0,\ v(x,0)=\max(s_o(x)-u(x),0)$$

Daher ist

$$\|s^o(.,t)\|_2 \le \|u\|_2 + \|v(.,t)\|_2$$

$$\le (\tfrac{1}{3}(s_o^2+s_o s_1+s_1^2))^{1/2} + e^{-D_s(\pi/l)^2 t}\|v(.,0)\|_2$$

$$\le l^{1/2}(s_o+s_1) + \|s_o\|_2$$

Der zweite Summand s^1 wird abgeschätzt durch

$$\|s^1(.,t)\|_2 \le l^{1/2}\|s^1(.,t)\|_\infty \le l^{1/2}\,\frac{\bar{k}l^2}{3D_s}C\ ,$$

entsprechend wird c^1 abgeschätzt. Für die Schranke von p^2 muß die Abhängigkeit von S_o durch eine Abhängigkeit von $\tilde{S}_o$ ersetzt werden: Wie vorher ist $s^o \le u+v$, mit

$$v(x,t) = \int_o^l \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_s(\pi/l)^2n^2t}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,v_o(\xi)\,d\xi$$

$$\le \|v_o\|_2\,\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_s(\pi/l)^2n^2t}\left(\int_o^l(\sin\frac{n\pi\xi}{l})^2d\xi\right)^{1/2}$$

$$\le \|v_o\|_2\,(2/l)^{1/2}\int_o^{\infty} e^{-D_s(\pi/l)^2\xi^2t}\,d\xi$$

$$\le \frac{\sqrt{l}}{(2\pi D_s t)^{1/2}}\,\|s_o\|_2 \le \frac{1}{(2\pi D_s t)^{1/2}}\,\tilde{S}_o$$

$$(8)\qquad s^o(x,t) \le s_1 + \frac{1}{(2\pi D_s t)^{1/2}}\,\tilde{S}_o \le \tilde{S}_o\left(1+\frac{1}{(2\pi D_s t)^{1/2}}\right)$$

$$s(x,t) \le \tilde{S}_o\left(1+\frac{1}{(2\pi D_s t)^{1/2}}\right) + \bar{k}\,\frac{l^2}{3D_s}C$$

Aus (6) folgt nun für die Abschätzung von p^2

$$|p^2(x,t)| \le 2C\int_o^t\sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_p(\pi/l)^2n^2\tau}\left(k\left(\tilde{S}_o+\frac{\tilde{S}_o l}{\sqrt{2\pi D_s(t-\tau)}}+\frac{\bar{k}Cl^2}{3D_s}\right)+\bar{k}\right)d\tau$$

$$\le \frac{Cl^2}{3D_p}\left(k\tilde{S}_o+\frac{k\bar{k}Cl^2}{3D_s}+\bar{k}\right)+\frac{2C\tilde{S}_o l}{\sqrt{2\pi D_s}}\int_o^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_p(\pi n/l)^2\tau}\,d\tau$$

$$(9)\qquad \le \frac{Cl^2}{3D_p}\left(k\tilde{S}_o+\frac{k\bar{k}Cl^2}{3D_s}+\bar{k}\right)+\frac{\tilde{S}_o Cl^2}{\sqrt{2D_s D_p}}$$

Im letzten Schritt wurden die Ungleicung

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_p(\pi n/l)^2\tau} \le \int_o^{\infty} e^{-D_p(\pi\xi/l)^2\tau}\,d\xi = \frac{1}{2(\pi D_p\tau)^{1/2}}$$

und die Beziehung

$\int_0^t (\tau(t-\tau))^{-1/2} d\tau = \int_0^1 (\tau(1-\tau))^{-1/2} d\tau = \pi$ benutzt.

Schließlich erhält man für p

$$\|p(.,t)\|_2 \leq \|p_0\|_2 + l^{1/2}\|p^1(.,t)+p^2(.,t)\|_\infty$$
$$\leq l^{1/2}(\tilde{P}_0 + C(1 + \frac{l^2}{3D_p}(k\tilde{S}_0+\bar{k}) + \frac{l^2}{\sqrt{2D_sD_p}}\tilde{S}_0$$
$$+ \frac{l^4}{9D_sD_p}k\bar{k}C))$$

Aus diesem Beweis folgt noch

6.3 Korollar

Für $t \geq T > 0$ gilt die Abschätzung von Lemma 1 auch, wenn man S_0, C_0 und P_0 durch $\tilde{S}_0$, $\tilde{C}_0$ und $\tilde{P}_0$ ersetzt.

Beweis: Die Abschätzungen für s^1, c^1 und p^1 bleiben wie im Beweis von Lemma 1, und p^2 ist gemäß (9) beschränkt. Für s^0 verwendet man die Abschätzung (8) aus dem Beweis von Lemma 2:

$s^0(x,t) \leq \tilde{S}_0(1 + l(2\pi D_s t)^{-1/2})$. Entsprechend gilt

$$c^0(x,t) \leq \tilde{C}_0(1 + l(2\pi D_c t)^{-1/2})$$
$$p^0(x,t) \leq \tilde{P}_0(1 + l(2\pi D_p t)^{-1/2})$$

Für den Stabilitätsbeweis werden die folgenden Hilfssätze gebraucht:

6.4 Lemma

Sei $u: [0,1] \to \mathbb{R}$ absolutstetig. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Falls $u(x_0)=0$ für ein $x_0 \in [0,1]$,so ist

$\int_0^1 u(x)^2dx \leq \frac{1^2}{2} \int_0^1 u'(x)^2dx$;

falls $u(0)=u(1)=0$, so läßt sich dies verschärfen zu

$\int_0^1 u(x)^2dx \leq \frac{1^2}{8} \int_0^1 u'(x)^2dx$

b) Unter derselben Voraussetzung ($u(x_0)=0$) ist

$(\int_0^1 u(x)dx)^2 \leq \frac{1^3}{3} \int_0^1 u'(x)^2dx$

c) $\int_0^1 u(x)^2dx \leq \frac{1}{1} (\int_0^1 u(x)dx)^2 + \frac{1^2}{2} \int_0^1 u'(x)^2dx$

Falls $\int_0^1 u(x)dx = 0$, stimmt a) mit c) überein.

Beweis: a) $u(x) = \int_{x_0}^x u'(y)dy \Rightarrow$

$$|u(x)| \leq \int_{x_0}^x 1\cdot|u'(y)|dy$$
$$\leq (\int_{x_0}^x dy)^{1/2} (\int_{x_0}^x |u'(y)|^2dy)^{1/2}$$
$$\leq |x-x_0|^{1/2} (\int_0^1 u'(y)^2dy)^{1/2} \Rightarrow$$

$\int_0^1 u(x)^2dx \leq \frac{1^2}{2} \int_0^1 u'(y)^2dy$

Falls $u(0) = u(1) = 0$,ist

$$\int_0^{1/2} u(x)^2dx + \int_{1/2}^1 u(x)^2dx \leq \frac{1^2}{8} (\int_0^{1/2} u'(x)^2dx + \int_{1/2}^1 u'(x)^2dx)$$

b) $\int_0^1 u(x)dx = \int_0^{x_0}\int_{x_0}^x u'(y)dydx + \int_{x_0}^1\int_{x_0}^x u'(y)dydx$

$$= -\int_0^{x_0}\int_0^y u'(y)dxdy + \int_{x_0}^1\int_y^1 u'(y)dxdy$$
$$= -\int_0^{x_0} yu'(y)dy + \int_{x_0}^1 (1-y)u'(y)dy \Rightarrow$$

$$(\int_0^1 u(x)dx)^2 \leq (\int_0^{x_0} y^2dy + \int_{x_0}^1 (1-y)^2dy) \int_0^1 u'(y)^2dy$$

$$= \frac{x_o^3 + (1-x_o)^3}{3} \int_o^1 u'(y)^2 dy$$

$$\leq \frac{1^3}{3} \int_o^1 u'(y)^2 dy$$

c) Aus dem Mittelwertsatz folgt, daß es ein $x_o \in [0,1]$ gibt mit $u(x_o) = \frac{1}{1} \int_o^1 u(x)dx$. Die Funktion $u - \frac{1}{1} \int_o^1 u(x)dx$ hat dann auf $[0,1]$ eine Nullstelle, so daß aus a) folgt

$$\frac{1^2}{2} \int_o^1 u'(x)^2 dx \geq \int_o^1 (u(x) - \frac{1}{1} \int_o^1 u(y)dy)^2 dx$$

$$= \int_o^1 u(x)^2 dx - \frac{1}{1}(\int_o^1 u(y)dy)^2$$ ∎

6.5 Lemma

Seien $x,y \in \mathbb{R}$, $\alpha,a,b > 0$, $\lambda \in (0,1)$. Dann gilt:

a) $|xy| \leq \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{1}{2\alpha} y^2$

b) $(x+y)^2 \leq \frac{1}{\lambda} x^2 + \frac{1}{1-\lambda} y^2$

c) $ax^2 + by^2 \geq \frac{ab}{a+b} (x+y)^2$

Beweis: a) $(\alpha x \pm y)^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha^2 x^2 + y^2 \geq \pm 2\alpha xy \Rightarrow$
$\alpha x^2 + y^2/\alpha \geq 2|xy|$

b) Aus a) mit $\alpha := 1/\lambda - 1$ folgt

$$2xy \leq (\frac{1}{\lambda} - 1)x^2 + (\frac{1}{\lambda} - 1)^{-1} y^2$$

$$= (\frac{1}{\lambda} - 1)x^2 + (\frac{1}{1-\lambda} - 1)y^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 2xy + y^2 \leq \frac{1}{\lambda} x^2 + \frac{1}{1-\lambda} y^2$$

c) folgt aus b) mit $\lambda := b/(a+b)$ ∎

6.6 Satz

Die normierten Diffusionskonstanten D_s/l^2, D_c/l^2 und D_p/l^2 seien hinreichend groß. Dann gibt es ein $M>0$, so daß die (eindeutig bestimmte) stationäre Lösung (s^o,c^o,p^o) des Problems (1) mit

$$\int_o^1 (c^o(x)+p^o(x))dx = \int_o^1 (c_o(x)+p_o(x))dx \equiv Cl$$

bezüglich aller Anfangsbedingungen $(s_o,c_o,p_o) \geq 0$ mit $l^{-1/2}\|c_o\|_2 \leq M$ in $L^2((0,1))$ asymptotisch stabil ist.

Insbesondere gilt diese Stabilitätsaussage auch für "dünne Membranen" (l klein).
Eine explizite hinreichende Bedingung für die Parameter ist (26).

Beweis: Wir betrachten das Differentialgleichungssystem, das von den Differenzfunktionen $\bar{s}=s-s^o$, $\bar{c}=c-c^o$ und $\bar{p}=p-p^o$ erfüllt wird:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{s}} &= D_s\bar{s}'' + k\bar{p} - k\bar{s}c - ks^o\bar{c} \\ \dot{\bar{c}} &= D_c\bar{c}'' + k\bar{p} - k\bar{s}c - ks^o\bar{c} \\ \dot{\bar{p}} &= D_p\bar{p}'' - k\bar{p} + k\bar{s}c + ks^o\bar{c} \end{aligned} \tag{11}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \bar{s}(0,t) &= \bar{s}(1,t) = 0 \\ \bar{c}'(0,t) &= \bar{c}'(1,t) = \bar{p}'(0,t) = \bar{p}'(1,t) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

und der Erhaltungsgröße

$$\int_o^1 (\bar{c}(x,t)+\bar{p}(x,t))dx = 0 \,. \tag{13}$$

Aus (11) und (12) folgt mit Lemma 4a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_o^1 \bar{s}(x,t)^2dx &= -\int_o^1 D_s\bar{s}'^2dx - \int_o^1 (kc\bar{s}^2+ks^o\bar{s}\bar{c}-k\bar{s}\bar{p})dx \\ &\leq -\int_o^1 \left(\left(\frac{8D_s}{l^2}+kc\right)\bar{s}^2 + ks^o\bar{s}\bar{c} - k\bar{s}\bar{p}\right)dx \end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\bar{c}(x,t)^2+\bar{p}(x,t)^2)dx \leq -\int_0^1 (D_c\bar{c}'^2+D_p\bar{p}'^2)dx$$

(15)
$$-\int_0^1 (ks^o\bar{c}^2+\bar{k}\bar{p}^2+kc\bar{s}\bar{c}-kc\bar{s}\bar{p}-(\bar{k}+ks^o)\bar{c}\bar{p})dx$$

Aus (14) und (15) folgt zunächst

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\bar{s}(x,t)^2 + \bar{c}(x,t)^2 + \bar{p}(x,t)^2)dx$$

$$\leq -\bar{k}\int_0^1 \bar{p}(x,t)^2dx + k(s_1+\|c(.,t)\|_\infty)\|\bar{s}(.,t)\|_2\|\bar{c}(.,t)\|_2$$
$$+ (\bar{k}+ k\|c(.,t)\|_\infty)\|\bar{s}(.,t)\|_2\|\bar{p}(.,t)\|_2$$
$$+ (\bar{k} + ks_1)\|\bar{c}(.,t)\|_2\|\bar{p}(.,t)\|_2$$
$$\leq (\bar{k}/2 + ks_1/2 +\|c(.,t)\|_\infty)\|\bar{s}(.,t)\|_2^2$$
$$+ (\bar{k}/2 + ks_1 + \|c(.,t)\|_\infty/2)\|\bar{c}(.,t)\|_2^2$$
$$+ k/2(s_1 + \|c(.,t)\|_\infty)\|\bar{p}(.,t)\|_2^2$$
$$\leq (\frac{\bar{k}}{2}+ks_1+\|c_o\|_2(1+\frac{1}{\sqrt{2\pi D_c t}})\|(\bar{s},\bar{c},\bar{p})(.,t)\|_2^2 \text{ nach (1o)}$$

(16)
$$\|(\bar{s},\bar{c},\bar{p})(.,t)\|_2^2 \leq \|(\bar{s}_o,\bar{c}_o,\bar{p}_o)\|_2^2\exp((\bar{k}+2ks_1+2\|c_o\|_2)t$$
$$+2l\|c_o\|_2(2t/\pi D_c)^{1/2})$$

Die rechte Seite von (15) soll weiter abgeschätzt werden. Dazu sei ein $t>0$ fest gewählt. Dann sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:
Fall a) Es gibt ein $x_o\in[0,1]$ mit $\bar{c}(x_o,t)=0$ oder $\bar{p}(x_o,t)=0$. Aus Lemma 4 folgt dann etwa im ersten Fall ($\bar{c}(x_o,t)=0$):

$$\int_0^1 \bar{p}'(x,t)^2dx \geq \frac{2}{1^2}\int_0^1\bar{p}(x,t)^2dx - \frac{2}{1^3}(\int_0^1 \bar{p}(x,t)dx)^2$$
$$= \frac{2}{1^2}\int_0^1 \bar{p}(x,t)^2dx - \frac{2}{1^3}(\int_0^1 \bar{c}(x,t)dx)^2$$
$$\geq \frac{2}{1^2}\int_0^1 \bar{p}(x,t)^2dx - \frac{2}{3}\int_0^1 \bar{c}'(x,t)^2dx$$

$$\int_o^1 (D_c\bar{c}'(x,t)^2+\bar{p}'(x,t)^2)dx \geq \frac{2\underline{D}}{1^2}\int_o^1 \bar{p}(x,t)^2dx$$
$$+(D_c-\frac{2\underline{D}}{3})\int_o^1 \bar{c}'(x,t)^2dx$$

$$\text{für } \underline{D} \leq \min(D_p,\ 3D_c/2)$$

$$\geq \frac{2}{1^2}\int_o^1 (\underline{D}\bar{p}(x,t)^2 + (D_c-\frac{2}{3}\underline{D})\bar{c}(x,t)^2)dx$$

Für $\bar{p}(x_o,t)=0$ verfährt man analog. Wenn man diese beiden Fälle zusammenfaßt, so erhält man

(17) $$\int_o^1 (D_c\bar{c}'(x,t)^2+D_p\bar{p}'(x,t)^2)dx$$
$$\geq \frac{2}{1^2}\int_o^1 (a\bar{c}(x,t)^2+b\bar{p}(x,t)^2)dx \text{ , falls}$$

(18) $$a,b \geq 0,\quad a+2b/3 \leq D_c,\ b+2a/3 \leq D_p$$

Fall b) Es gibt kein $x_o\in[0,1]$ mit $\bar{c}(x_o,t)=0$ oder $\bar{p}(x_o,t)=0$. Dann wechseln $\bar{p}(.,t)$ und $\bar{c}(.,t)$ das Vorzeichen nicht. Da $\int_o^1 (\bar{p}(x,t)+\bar{c}(x,t))dx = 0$, müssen sie verschiedene Vorzeichen haben: $\bar{c}(x,t).\bar{p}(x,t) < 0$ für alle $x\in[0,1]$.

Aus Lemma 5c folgt

$$\int_o^1 (D_c\bar{c}'(x,t)^2+D_p\bar{p}'(x,t)^2)dx \geq \frac{D_cD_p}{D_c+D_p}\int_o^1(\bar{c}'(x,t)+\bar{p}'(x,t))^2 dx$$

(19) $$\geq \frac{2}{1^2}\frac{D_cD_p}{D_c+D_p}\int_o^1 (\bar{c}(x,t)+\bar{p}(x,t))^2dx$$

Sei nun (eventuell von x abhängig) λ und μ so gewählt, daß

$$0 < \lambda,\mu < \frac{2}{1^2}\frac{D_cD_p}{D_c+D_p}$$

(20) $$(\frac{D_cD_p}{D_c+D_p}\frac{2}{1^2}-\lambda)(\frac{D_cD_p}{D_c+D_p}\frac{2}{1^2}-\mu) \geq (\frac{D_cD_p}{D_c+D_p}\frac{2}{1^2}-\frac{\bar{k}+ks^o(x)}{2})^2$$

(Im Spezialfall $\lambda=\mu$ ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\lambda(x) = \mu(x) \leq \min(\frac{\bar{k}+ks^o(x)}{2},\ \frac{D_cD_p}{D_c+D_p}\frac{2}{1^2}).)$$

Dann folgt (im Fall $\frac{\bar{k}+ks^o}{2} < \frac{D_c D_p}{D_c+D_p}\frac{2}{l^2}$ aus Lemma 5a)

$$\left(2\frac{D_c D_p}{D_c+D_p}\frac{2}{l^2} - \bar{k} - ks^o\right)|\bar{c}\bar{p}| \leq \left(\frac{D_c D_p}{D_c+D_p}\frac{2}{l^2} - \lambda\right)\bar{c}^2 + \left(\frac{D_c D_p}{D_c+D_p}\frac{2}{l^2} - \mu\right)\bar{p}^2$$

$$\Rightarrow \frac{D_c D_p}{D_c+D_p}\frac{2}{l^2}(\bar{c}+\bar{p})^2 \leq -(\bar{k}+ks^o)\bar{p}\bar{c} + \lambda\bar{c}^2 + \mu\bar{p}^2$$

Damit erhält man aus (19)

$$\int_o^1 (D_c\bar{c}'(x,t)^2 + D_p\bar{p}'(x,t)^2 + (\bar{k}+ks^o(x))\bar{c}(x,t)\bar{p}(x,t))\,dx \geq \int_o^1 (\lambda(x,t)\bar{c}(x,t)^2 + \mu(x,t)\bar{p}(x,t)^2)dx \quad ,$$

wenn λ und μ die Bedingungen (20) erfüllen. Dabei können λ und μ beliebig (meßbar) von x und t abhängen. Die Abschätzungen (14) und (15) gehen damit über in

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_o^1 (\bar{s}(x,t)^2 + \bar{c}(x,t)^2 + \bar{p}(x,t)^2)dx \leq$$

$$\begin{cases} -\int_o^1 \left(\left(\frac{8D_s}{l^2}+kc\right)\bar{s}^2 + \left(\frac{2a}{l^2}+ks^o\right)\bar{c}^2 + \left(\frac{2b}{l^2}+\bar{k}\right)\bar{p}^2\right)dx \\ \quad + \int_o^1 (-(ks^o+kc)\bar{s}\bar{c} + (\bar{k}+ks^o)\bar{s}\bar{p} + (\bar{k}+ks^o)\bar{c}\bar{p})dx \\ \qquad\qquad \text{im Fall a)} \\ -\int_o^1 \left(\left(\frac{8D_s}{l^2}+kc\right)\bar{s}^2 + \lambda\bar{c}^2 + \mu\bar{p}^2\right)dx \\ \quad + \int_o^1 (-(ks^o+kc)\bar{s}\bar{c} + (\bar{k}+kc)\bar{s}\bar{p})dx \\ \qquad\qquad \text{im Fall b)} \end{cases}$$

was mithilfe von Lemma 5a auf die folgende Ungleichung (21) führt:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\bar{s}(x,t)^2 + \bar{c}(x,t)^2 + \bar{p}(x,t)^2)dx \leq$$

$$(21)\quad \begin{cases} -\int_0^1 \left(\frac{8D_s}{l^2} + kc\left(1-\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\right) - ks^o\frac{\alpha_2}{2} - \bar{k}\frac{\alpha_4}{2}\right)\bar{s}^2\,dx \\ \quad -\int_0^1 \left(\frac{2a}{l^2} - \frac{kc}{2\alpha_1} + ks^o\left(1-\frac{1}{2\alpha_2}\right)\frac{\alpha_5}{2} - \bar{k}\frac{\alpha_6}{2}\right)\bar{c}^2\,dx \\ \quad -\int_0^1 \left(\frac{2b}{l^2} - \frac{kc}{2\alpha_3} - \frac{ks^o}{2\alpha_5} + \left(1-\frac{1}{2\alpha_4} - \frac{1}{2\alpha_6}\right)\bar{k}\right)\bar{p}^2\,dx \\ \qquad\qquad \text{im Fall a)} \\ -\int_0^1 \left(\frac{8D_s}{l^2} + kc\left(1-\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\right) - ks^o\frac{\alpha_2}{2} - \bar{k}\frac{\alpha_4}{2}\right)\bar{s}^2\,dx \\ \quad -\int_0^1 \left(\lambda - \frac{kc}{2\alpha_1} - \frac{ks^o}{2\alpha_2}\right)\bar{c}^2\,dx \\ \quad -\int_0^1 \left(\mu - \frac{kc}{2\alpha_3} - \frac{\bar{k}}{2\alpha_4}\right)\bar{p}^2\,dx \quad \text{im Fall b).} \end{cases}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ und α_6 sind >0 und können beliebig (meßbar) von x und t abhängen. Man kann nun erkennen, daß unter geeigneten Voraussetzungen an die Systemparameter die α_i so gewählt werden können, daß die Faktoren vor $\bar{s}^2$, $\bar{c}^2$ und $\bar{p}^2$ für hinreichend große t positiv werden.
Falls die normierten Diffusionskonstanten $\frac{D_s}{l^2}$, $\frac{D_c}{l^2}$, $\frac{D_p}{l^2}$ hinreichend groß sind, ist die Forderung offenbar stets erfüllbar. Falls

$$(22)\quad \begin{aligned} &\frac{8D_s}{l^2} > \sup_{x,t}\left(\left(\frac{3kc}{4\bar{k}} - 1\right)kc + \frac{ks^o}{2} + \bar{k}\right) \quad \text{und} \\ &\frac{6}{5l^2}\frac{D_cD_p}{D_c+D_p} > \max\left(\frac{\bar{k}}{4} + \frac{ks_1}{2}, \sup_{x,t}\frac{kc+\bar{k}}{2}\right) \end{aligned}$$

kann man etwa $a = b = \frac{3}{5}\frac{D_cD_p}{D_c+D_p}$, $\lambda(x)=\mu(x)=\frac{\bar{k}+ks^o(x)}{2}$,

$\alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_6 = 1$, $\alpha_4 = 2$ und $\alpha_1 > kc/(2\bar{k})$,

$\alpha_3 > kc/\bar{k}$, so daß $kc\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2} < \frac{8D_s}{l^2} + kc - ks^o - \bar{k}$

setzen.

Da nach (4) und (10) c beschränkt ist durch

$c(x,t) \leq \tilde{M}_c + \text{const}/\sqrt{t}$ mit $\tilde{M}_c := \tilde{C}_o + C(1+(\bar{k}/D_c)^{1/2}1)$,

ist (22) insbesondere dann erfüllbar, wenn

$$\text{(23)} \qquad \begin{aligned} &\frac{8D_s}{l^2} > \max\left(\frac{3k}{4\bar{k}}M_c - 1, 0\right)\cdot kM_c + ks_1/2 + \bar{k} \quad \text{und} \\ &\frac{12}{5l^2}\frac{D_c D_p}{D_c+D_p} > \max\left(\frac{\bar{k}}{2} + ks_1, \bar{k} + kM_c\right) \end{aligned}$$

Aus diesen Überlegungen folgt, daß

$$\text{(24)} \qquad \frac{d}{dt}\int_0^1 (\bar{s}(x,t)^2 + \bar{c}(x,t)^2 + \bar{p}(x,t)^2)\,dx \leq 0$$

für hinreichend große t und "=0" nur dann, wenn $\|s(.,t)\|_2 = \|c(.,t)\|_2 = \|p(.,t)\|_2 = 0$, und bei geeigneter Wahl der α_i gibt es sogar ein $\delta>0$, so daß $\frac{d}{dt}\|(s,c,p)\|_2^2 \leq -\delta \|(s,c,p)\|_2^2$.

Damit ist gezeigt, daß unter den gegebenen Bedingungen

$$\text{(25)} \qquad L^2 - \lim (s(.,t),c(.,t),p(.,t)) = (s^o,c^o,p^o)$$

Aus (25) und (16) folgt die asymptotische Stabilität der stationären Lösung in L^2.

Eine hinreichende Bedingung dafür, daß es beschränkte Mengen gibt, bezüglich derer das Gleichgewicht stabil ist, wäre etwa

$$\text{(26)} \qquad \begin{aligned} &\frac{8D_s}{l^2} > \max\left(\frac{3k}{4\bar{k}}C(2+(\frac{\bar{k}}{D_c})^{\frac{1}{2}}1) - 1, 0\right)\cdot kC(2 + (\frac{\bar{k}}{D_c})^{\frac{1}{2}}1) + \bar{k} \\ &\qquad + ks_1/2 \\ &\frac{12}{5l^2}\frac{D_c D_p}{D_c+D_p} > \max\left(\frac{\bar{k}}{2} + ks_1, \bar{k} + kC(2 + (\frac{\bar{k}}{D_c})^{1/2}1)\right) \end{aligned}$$

Dann kann man ein $\tilde{M}_c \geq C\,(2 + (\frac{\bar{k}}{D_c})^{1/2} 1)$ ermitteln,

das die Ungleichung (23) erfüllt. Mit
$M := M_o - C(1 + (\bar{k}/D_c)^{1/2}1) \geq C$ folgt: Die stationäre Lösung ist asymptotisch stabil in $L^2((0,1), \mathbb{R}^3_+)$ bezüglich Anfangsbedingungen (s_o, c_o, p_o), die $1^{-1/2}\|c_o\|_2 \leq M$ erfüllen. □

Lokale Stabilität

Die folgenden Sätze über lokale Stabilität lassen sich auf höhere Raumdimensionen übertragen und sollen daher gleich für diesen allgemeineren Fall formuliert werden. Sei also $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet mit glattem ($C^{2+\alpha}$-)Rand, und es werde das System

$$
\begin{aligned}
&\dot{s} = D_s\Delta s + \bar{k}p - ksc \qquad s_{|\partial\Omega\times(0,T)} = s_o(x)\\
(27)\qquad &\dot{c} = D_c\Delta c + \bar{k}p - ksc \qquad \frac{\partial c}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (s_o \in C^{2+\alpha})\\
&\dot{p} = D_p\Delta p - \bar{k}p + ksc\\
&\int_\Omega (c(x,t)+p(x,t))dx = |\Omega|C
\end{aligned}
$$

untersucht. Aus Abschnitt III.3 sei vorweggenommen, daß es genau eine stationäre Lösung (s^o, c^o, p^o) hat, und diese liegt in $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Transformiert man sie in den Ursprung, so erhält das System die Gestalt (vgl.(11))

$$
\begin{aligned}
&u : \bar{\Omega}\times[0,T) \to \mathbb{R}^N\\
(28)\qquad &\dot{u} = \bar{A}u + \bar{f}(x,u) \qquad Bu = 0 \text{ auf } \partial\Omega ,\\
&Gu = 0
\end{aligned}
$$

wobei die Bezeichnungen wie im Abschnitt 2 über die lokale Existenz zu verstehen seien und

$G : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}^N$ ein beschränkter linearer Operator sei

(29) mit $G(\bar{A}u + \bar{f}(x,u)) = 0$ für alle $u \in C^2(\Omega)$ mit $Bu = 0$.

Die Voraussetzungen an f, die die lokale Existenz und Eindeutigkeit für die Lösungen der Anfangs-

Randwertaufgabe garantieren, seien erfüllt (siehe (5) in Abschnitt 2). Ferner soll f stetig differenzierbar sein. Der Ursprung sei eine stationäre Lösung, es sei also $\bar{f}(x,0) = 0$ für alle $x \in \bar{\Omega}$. Unter diesen Voraussetzungen folgt

6.7 Satz

Wenn die Linearisierung von $\bar{A}+\bar{f}$ zusammen mit der Randbedingung B auf $E := \{u \in L^2(\Omega) \mid Gu=0\}$ zu einem Operator führt, der keine Eigenwerte mit nichtnegativen Realteilen hat, so ist der Ursprung in (28) lokal asymptotisch stabil in der Topologie von $C(\bar{\Omega})$.

Beweis: Es sei $\bar{A}_o+\bar{f}_o = \bar{A}+\bar{f}$, wobei $\bar{f}_o$ die Linearisierung 0 besitzt. Durch $\bar{A}$ wird zusammen mit den Randbedingungen B eine holomorphe Halbgruppe $\{e^{At} \mid t \geq 0\}$ mit einem Generator A auf $L^2(\Omega)$ erzeugt, wie im Abschnitt 2 ausgeführt wurde. Durch $\bar{A}-\bar{A}_o$ wird ein beschränkter Operator $A-A_o$ auf L^2 definiert. Damit erzeugt auch A_o eine holomorphe Halbgruppe auf L^2 (siehe z.B. Theorem 1.3.2 in [26]), die wegen der Invarianzbedingung (29) auf den abgeschlossenen Teilraum E eingeschränkt werden kann. Die Operatoren der von A erzeugten Halbgruppe bilden für $t>0$ in $D(A) \subset H^2(\Omega)$ ab. Die Voraussetzungen an Ω garantieren (Ω ist beschränkt mit C^2-Rand), daß die Einbettung $H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt ist (Satz 3.4.4 in [70]), so daß e^{At} kompakt ist für alle $t>0$. Diese Aussage gilt dann auch für $e^{A_o t}$ wegen

$$(30) \qquad e^{A_o t}x = e^{At}x + \int_o^t e^{A(t-s)}(A_o-A)e^{A_o s}x \, ds$$

mit fast überall kompaktem Integranden (zum Beweis betrachte man eine schwach konvergente Folge x_n).
Damit besteht aber das Spektrum von $e^{A_o t}$ für alle $t>0$ nur aus Eigenwerten (bis auf eventuell 0):
$\sigma(e^{A_o t}) \subset P\sigma(e^{A_o t}) \cup \{0\}$ auf $L^2(\Omega)$ und auf E, wobei mit σ das Spektrum und mit $P\sigma$ das Punktspektrum bezeichnet werde. Für das Punktspektrum gilt aber $\forall t>0$
$P\sigma(e^{A_o t}) \setminus \{0\} = e^{tP\sigma(A_o)}$. Sind nun die Realteile aller Eigenwerte <0, so folgt die Stabilität für die lineare Gleichung aus

$$\begin{aligned}
\omega_o &:= \inf \{\omega \in \mathbb{R} \mid \exists M>0: \|e^{A_o t}\| \le M e^{\omega t} \ \forall t \ge 0\} \\
&= \frac{1}{t} \ln (\text{Spektralradius von } e^{A_o t}) \quad \forall t>0 \ [28] \\
&= \frac{1}{t} \ln (\sup \{ |\mu| \mid \mu \text{ Eigenwert von } e^{A_o t}\}) \\
&= \frac{1}{t} \ln (\max \{ |\mu| \mid \mu \text{ Eigenwert von } e^{A_o t}\}), \\
&\qquad \text{da sich die Eigenwerte außer bei 0 nicht häufen können} \\
&= \max \{ \operatorname{re} \lambda \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A_o \} \quad < 0 .
\end{aligned}$$

Damit folgt: Für alle $\omega \in (0,-\omega_o)$ gibt es ein $M>0$ mit

$$\|e^{A_o t}\|_E \le M e^{-\omega t}, \quad \|e^{A_o t}\|_{E \cap D(A^n)} \le M \cdot e^{-\omega t}$$

$$\|A_o^n e^{A_o t}\|_E \le M t^{-n} \cdot e^{-\omega t}, \|e^{A_o t} u\|_{E \cap D(A^n)} \le M t^{-n} e^{-\omega t} \|u\|_E$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \le n_o$ und für alle $t>0$
(Theorem II.2.2 in [17]).

Da $D(A^n)$ für $n > m/2$ stetig in $C(\bar{\Omega})$ eingebettet ist:

$$\|e^{A_o t} u\|_C \le \text{const } \|e^{A_o t} u\|_{D(A^n)} = \text{const } M t^{-n} e^{-\omega t} \|u\|_2$$
$$\le = \underline{M} t^{-n} e^{-\omega t} \|u\|_C \quad \text{für } u \in E \cap C(\bar{\Omega}) .$$

Andererseits ist A_o die Summe aus einem Operator A, für den das Maximumprinzip gilt, und einem beschränkten Operator A_o-A. Aus der Integralgleichung (30) und dem Lemma von Gronwall erhält man

$$\|e^{A_o t}\|_{C\cap E} \leq \tilde{M}\, e^{Lt} \quad \text{für alle} \quad t\geq 0$$

$$\|e^{A_o t}\|_{C\cap E} \leq \min\,(\,\tilde{M}e^{Lt},\ \underline{M}\, t^{-n}e^{-\omega t})$$

$$\leq \max\,(\,\tilde{M}e^{L+\omega}\,,\ \underline{M})e^{-\omega t}$$

$$\leq \bar{M}\, e^{-\omega t} \quad \text{für alle} \quad t\geq 0\ .$$

f_o erfüllt eine lokale Lipschitzbedingung, insbesondere wegen $f_o(0) = 0$:

$$\|f_o(u)\|_C \leq \mu(\|u\|_C)\|u\|_C\ .$$

$\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ kann dabei monoton wachsend gewählt werden und so, daß $\lim_{\varepsilon\to 0} \mu(\varepsilon) = 0$, da A_o die Linearisierung von A+f sein sollte.

Die Lösung u zu einer Anfangsfunktion $u_o\in E$ erfüllt nun eine Integralgleichung (2.6)

$$(31) \qquad u(t) = e^{A_o t}u_o + \int_o^t e^{A_o(t-s)}f_o(u(s))ds$$

woraus sich für $u_o\in E$ die Abschätzung

$$\|u(t)\|_C \leq \bar{M}\, e^{-\omega t}\|u_o\|_C + \int_o^t \bar{M}e^{-\omega(t-s)}\mu(\|u(s)\|_C)\|u(s)\|_C ds$$

herleitet. Aus dem Gronwallschen Lemma folgt für alle $t \in [0,T]$, T aus dem Existenzintervall

$$\|u(t)\|_C \leq \bar{M}\|u_o\|_C \exp(t(\,\bar{M}\sup\{\mu(\|u(s)\|_C \mid 0\leq s\leq T\} - \omega)\,)$$

Wählt man zu $0<\varepsilon<\omega$ nun ein $\delta>0$ so, daß $\bar{M}\mu(\bar{M}\delta)<\varepsilon$, so ist für alle $u_o \in C\cap E$ mit $\|u_o\|_C < \delta$

$$\|u(t)\|_C \leq \bar{M}\|u_o\|_C\, e^{-(\omega-\varepsilon)t} \leq \bar{M}\|u_o\|_C \leq \bar{M}\delta \quad \forall t\in[0,T]\ ,$$

für alle $T\geq 0$ mit $\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_C \leq \bar{M}\delta$, $\Rightarrow$

$$\|u(t)\|_C \leq \bar{M}\, e^{-(\omega-\varepsilon)t}\,\|u_o\|_C \quad \text{für alle} \quad t\geq 0.$$

6.8 Korollar

Sei m=1. Die stationäre Lösung von (1) ist lokal asymptotisch stabil in $C([0,1])$, falls

$$
(32)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{8D_s}{l^2} > (\tfrac{3}{4}M-1)M + \frac{ks_1}{2} + \bar{k} \quad , \quad M := \frac{\max(1, D_c/D_p)C}{\frac{D_c}{D_p}\frac{\bar{k}}{k} + s_o} \\
&\frac{12}{5l^2}\frac{D_c D_p}{D_c+D_p} > \max\left(\frac{\bar{k}}{2} + ks_1 \, , \, \bar{k}(M+1)\right) \qquad (s_o \leq s_1)
\end{aligned}
$$

Beweis: Man verfolge den Beweis von Satz 6 und betrachte statt (11) die linearisierte Gleichung

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{s}} &= D_s\bar{s}'' + \bar{k}\bar{p} - ks^o\bar{c} - kc^o\bar{s} \\
\dot{\bar{c}} &= D_c\bar{c}'' + \bar{k}\bar{p} - ks^o\bar{c} - kc^o\bar{s} \\
\dot{\bar{p}} &= D_p\bar{p}'' - \bar{k}\bar{p} + ks^o\bar{c} + kc^o\bar{s}
\end{aligned}
$$

Die Bedingung (22) geht dann über in

$$
\frac{8D_s}{l^2} > \sup_{0\leq x\leq 1}\left(\left(\frac{3kc^o}{4\bar{k}} - 1\right)kc^o + \frac{ks^o}{2} + \bar{k}\right)
$$

$$
\frac{12}{5l^2}\frac{D_c D_p}{D_c+D_p} > \max\left(\frac{\bar{k}}{2} + ks_1 \, , \, \sup_{0\leq x\leq 1}(kc^o+\bar{k})\right),
$$

und mit der Abschätzung für c^o aus Korollar 4.10

$$
c^o(x) \leq c^o(0) \leq \frac{\bar{k}}{k}\frac{\max(D_c/D_p, 1)C}{\frac{D_c}{D_p}\frac{\bar{k}}{k} + s_o}
$$

folgt, daß die Bedingung (32) hinreichend für Stabilität ist. □

6.9 Korollar

Wenn $D := D_c = D_p$, d.h. die Diffusionskonstanten für den beladenen und den unbeladenen Carrier gleich sind, so ist die stationäre Lösung von (27) lokal asymptotisch stabil in $C(\bar{\Omega})$.

Beweis: Es sei (s^o,c^o,p^o) die stationäre Lösung und λ ein Eigenwert des linearisierten Operators. Dann gibt es eine Lösung $(s,c,p)\in D(A)\subset L^2(\Omega)$, $(s,c,p)\neq 0$ von

$$
\begin{aligned}
&D_s\Delta s = kc^o s + ks^o c - \bar{k}p + \lambda s \qquad s_{|\partial\Omega} = 0\\
&D_c\Delta c = kc^o s + ks^o c - \bar{k}p + \lambda c \qquad \frac{\partial c}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} = 0\\
&D_p\Delta p = -kc^o s - ks^o c + \bar{k}p + \lambda p\\
&\int_\Omega (c(x)+p(x))dx = 0 \qquad\qquad \text{mit } D=D_c=D_p
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Durch Addition der Gleichungen für c und p erhält man

$$
\begin{aligned}
&D\,\Delta(c+p) = \lambda(c+p) \qquad \frac{\partial}{\partial n}(c+p)_{|\partial\Omega} = 0\\
&\int_\Omega (c(x)+p(x))dx = 0
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Dann ist λ ein Eigenwert der Laplacegleichung mit Neumannschen Randbedingungen und damit $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda<0$, oder es ist $c+p\equiv 0$. Im letzten Fall wäre λ auch ein Eigenwert zu

$$
\begin{aligned}
&D_s\Delta s = \quad kc^o s - (ks^o+\bar{k})p\\
&D\,\Delta p = -\,kc^o s + (ks^o+\bar{k})p \qquad s_{|\partial\Omega} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Dieser Operator erzeugt eine strikt positive, kompakte Halbgruppe in $L^2(\Omega)$. Ihr Spektralradius ist dann ein positiver Eigenwert $e^{\mu t}$ mit positiver Eigenfunktion [36]. Aus $e^{\mu t}>0\ \forall t\geq 0$ folgt $\mu\in\mathbb{R}$, und μ ist ein Eigenwert zu (35) mit positiver Eigenfunktion (s,p). Wäre $\mu\geq 0$, so wäre

$$\Delta(D_s s + Dp) = \mu(s+p) \geq 0\ . \tag{36}$$

Falls $D_s s+Dp$ nicht konstant ist, kann diese Funktion ihr Maximum nur in einem Punkt $x_o\in\partial\Omega$ annehmen; dort gilt dann aber (2.3, Theorem 7 in [55])

$$D_s \frac{\partial s}{\partial n}(x_o) = \frac{\partial}{\partial n}(D_s s + Dp)(x_o) > 0\ ,$$

andererseits folgt aber aus: $s\geq 0$, $s_{|\partial\Omega}=0$, daß die Normalableitung von s ≤ 0 ist. Daher muß $K=D_s s+Dp$ konstant sein; aus (36) folgt $\mu(s+p) = 0$. Im Falle

$\mu>0$ ist dann $s=-p$ und $D_s\Delta s = (kc^o+ks^o+\bar{k}+\mu)s > 0$,
$s_{|\partial\Omega} = 0 \Rightarrow s\leq 0 \Rightarrow s\equiv 0$.

Im Falle $\mu=0$ nehmen wir an, daß $K>0$ sei. Auf $\partial\Omega$ gilt dann

$$\frac{\partial s}{\partial n} = 0 \ , \ 0 = s < p = K/D \ . \tag{37}$$

Sei $x_o\in\partial\Omega$, $K_\varepsilon(x_o)$ eine ε-Umgebung von x_o, so daß auf $K_\varepsilon(x_o)\cap\Omega$ gilt: $kc^o s < (ks^o+\bar{k})p$. Aus (35) folgt dann $D_s\Delta s < 0$ auf $K_\varepsilon(x_o)\cap\Omega$, und in $x_o \in \partial(K_\varepsilon(x_o)\cap\Omega)$ nimmt s sein Minimum an, $\Rightarrow$ $\frac{\partial s}{\partial n}(x_o) < 0$ im Widerspruch zu (37).

Daher ist $K=0$ und $s\equiv p\equiv 0$. Dann ist aber μ kein Eigenwert, so daß die Annahme $\mu\geq 0$ zum Widerspruch geführt ist.

Es bleibt nur die Möglichkeit $\mu<0 \Rightarrow |e^{\lambda t}| \leq e^{\mu t} < 1$ $\Rightarrow$ re $\lambda < 0$. ∎

6.10 Korollar

Wenn s_o auf $\partial\Omega$ konstant ist, so ist das (homogene) Gleichgewicht von (27) lokal asymptotisch stabil in $C(\bar{\Omega})$.

Beweis: Sei (s^o,c^o,p^o) die konstante stationäre Lösung und λ ein Eigenwert des linearisierten Operators. Sei $(s,c,p)\neq 0$ dann eine Lösung von (33). Dann folgt

$$\begin{aligned}
-D_s\int_\Omega(\nabla s)^2dx &= \int_\Omega s(kc^o s+ks^o c-\bar{k}p)dx + \lambda\int_\Omega s^2dx\\
-D_c\int_\Omega(\nabla c)^2dx &= \int_\Omega c(kc^o s+ks^o c-\bar{k}p)dx + \lambda\int_\Omega c^2dx\\
-D_p\int_\Omega(\nabla p)^2dx &= -\int_\Omega p(kc^o s+ks^o p-\bar{k}p)dx + \lambda\int_\Omega p^2dx\\
-\int_\Omega(D_s kc^o(\nabla s)^2+D_c ks^o(\nabla c)^2+D_p\bar{k}(\nabla p)^2+(kc^o s+ks^o c-\bar{k}p)^2)dx&\\
= \lambda\int_\Omega (kc^o s^2 + ks^o c^2 + \bar{k}p^2)\,dx &
\end{aligned} \tag{38}$$

Daher ist $\lambda \in R$ und $\lambda \leq 0$.
Sei zunächst $s_o = s^o > 0$ und $C>0$. Dann sind auch die Komponenten c^o und p^o der stationären Lösung von (27) > 0. Dann folgt aus

$\int_\Omega (s(x)^2 + c(x)^2 + p(x)^2)\, dx > 0$ und den Randbedingungen auch $\int_\Omega ((\nabla s(x))^2 + (\nabla c(x))^2 + (\nabla p(x))^2) dx > 0$

und damit $\lambda < 0$.

Im Falle $s_o = s^o = 0$ und $C>0$ (dann ist $c^o > 0$) folgt aus (38): $\lambda < 0$ oder $\int_\Omega s^2 dx = \int_\Omega p^2 dx = 0$. Im zweiten Fall wäre $s \equiv p \equiv 0$ und daher $\int_\Omega c^2 dx > 0$ (da λ ein Eigenwert sein sollte). Wegen der Randbedingungen an c folgt $\int_\Omega (\nabla c)^2 dx > 0 \Rightarrow -D_c \int_\Omega (\nabla c)^2 dx = \lambda \int_\Omega c^2 dx$,

und daher $\lambda < 0$.

Im Falle $s_o = s^o > 0$ und $C=0$ ist $c^o = 0$, und man kann analog zum vorigen Fall schließen, daß $\lambda < 0$ sein muß.

Falls schließlich $s_o = s^o = 0$ und $C=0$,so ist auch $c^o = p^o = 0$ und (38) besagt $- D_p \int_\Omega (\nabla p)^2 dx = \lambda \int_\Omega p^2 dx$, also $\lambda < 0$ oder $p \equiv 0$. $p \equiv 0$ impliziert

$- \int_\Omega (D_s (\nabla s)^2 + D_c (\nabla c)^2)\, dx = \lambda \int_\Omega s^2 dx \Rightarrow$

$\lambda < 0$ oder $s \equiv c \equiv 0$. $s \equiv c \equiv 0$ stände im Widerspruch zur Annahme $(s,c,p) \neq 0$; daher folgt auch in diesem Fall für jeden Eigenwert: $\lambda < 0$. ∎

Globale Stabilität

Die folgenden Sätze gelten auch für den mehrdimensionalen Fall, sofern die globale Beschränktheit nachgewiesen werden kann.
Sei daher die Raumdimension $m \leq 5$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ($\partial\Omega$ sei eine $C^{2+\alpha}$-Mannigfaltigkeit).
Nach Korollar 3.6 sind dann die Lösungen von (27) global beschränkt. Außerdem existiert genau eine stationäre Lösung (Abschnitt III.3), die homogen ist, wenn die Randbedingung $s_{|\partial\Omega} = s_o$ konstant ist. In diesem Fall hat das System

$$(39) \qquad \begin{aligned} \dot{s} &= D_s \Delta s + \bar{k}p - ksc & s_{|\partial\Omega} &= s_o \\ \dot{c} &= D_c \Delta c + \bar{k}p - ksc & \frac{\partial c}{\partial n} &= \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \\ \dot{p} &= D_p \Delta p - \bar{k}p + ksc \end{aligned}$$

eine Ljapunovfunktion.
Für diese wird vorweg bewiesen

6.11 Lemma
Sei $y,z > 0$. Dann gelten die Ungleichungen

a) $\ln \frac{y}{z} \, (y-z) \geq \frac{(y-z)^2}{\max(y,z)}$

b) $\frac{(y-z)^2}{2\max(y,z)} \leq y \ln \frac{y}{z} - y + z \leq \frac{(y-z)^2}{z}$

Beweis: a) Sei $x \geq 0$, $f(x) := (1+x)\ln(1+x) - x \Rightarrow$
$f(0) = 0$, $f'(x) = \ln(1+x) \geq 0 \Rightarrow f \geq 0 \Rightarrow (1+x)\ln(1+x) \geq x$
Für $y \geq z > 0$ folgt mit $x := y/z - 1$:
$\frac{y}{z} \ln \frac{y}{z} \geq \frac{y}{z} - 1 \Rightarrow y(y-z) \ln \frac{y}{z} \geq (y-z)^2 \Rightarrow (y-z)\ln \frac{y}{z} \geq \frac{(y-z)^2}{z}$

Für $z \geq y > 0$ gilt entsprechend

$$(y-z)\ln\frac{y}{z} = (z-y)\ln\frac{z}{y} \geq \frac{(y-z)^2}{z}$$

b) Für $x>0$ ist $\ln x \leq x-1 \Rightarrow x\ln x \leq x^2-x = (x-1)^2+x-1$
$\Rightarrow x\ln x - x + 1 \leq (x-1)^2$. Für $y,z > 0$ ist daher
$\frac{y}{z}\ln\frac{y}{z} - \frac{y}{z} + 1 \leq (\frac{y}{z}-1)^2 \Rightarrow y\ln\frac{y}{z} - y + z \leq \frac{(y-z)^2}{z}$

Damit ist die rechte Ungleichung gezeigt. Für die linke Ungleichung werden die Fälle $y \geq z$ und $y \leq z$ getrennt untersucht.

Sei für $x \geq 0$ $f(x) := (1+x)^2\ln(1+x) - x(1+x) - x^2/2$
$\Rightarrow f(0)=0,\ f'(x) = 2(1+x)\ln(1+x) - 2x \geq 0$ (Bew. von a)
$\Rightarrow f \geq 0 \Rightarrow (1+x)^2\ln(1+x) - x(1+x) \geq x^2/2$.

Für $y \geq z > 0$ folgt mit $x := y/z - 1$

$$(\frac{y}{z})^2\ln\frac{y}{z} - \frac{y}{z}(\frac{y}{z}-1) \geq \frac{1}{2}(\frac{y}{z}-1)^2 \quad \Rightarrow$$

$$(*) \qquad y\ln\frac{y}{z} - (y-z) \geq \frac{(y-z)^2}{2y}$$

Sei nun für $x \geq 0$ $f(x) := (1+x)\ln(1+x) - x - x^2/2$
$\Rightarrow f(0)=0,\ f'(x) = \ln(1+x) - x \leq 0$
$\Rightarrow f \leq 0,\ (1+x)\ln(1+x) - x \leq x^2/2$.

Für $z \geq y > 0$ ist dann mit $x := z/y - 1$

$$\frac{z}{y}\ln\frac{z}{y} - \frac{z}{y} + 1 \leq \frac{1}{2}(\frac{z}{y}-1)^2 \Rightarrow$$

$$y\ln\frac{y}{z} + y - \frac{y^2}{2} \geq -\frac{1}{2z}(z-y)^2 \Rightarrow$$

$$y\ln\frac{y}{z} - y + z \geq \frac{y^2}{z} - 2y + z - \frac{1}{2z}(z-y)^2 = \frac{(y-z)^2}{2z}$$

Zusammen mit (*) folgt die Behauptung. ∎

6.12 Satz

Sei s_o konstant auf $\partial\Omega$. Dann ist das (homogene) Gleichgewicht von (1) global asymptotisch stabil in $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3_+)$.

Es gilt sogar

$$\lim_{t\to\infty} \|(s(.,t),c(.,t),p(.,t)) - (s^o,c^o,p^o)\|_{C^1} = 0 \tag{40}$$

für jede Lösung (s,c,p) .

Beweis: Das homogene Gleichgewicht ist gegeben durch

$$s^o = s_o \ , \ ks^oc^o = \bar{k}p^o \ , \ c^o + p^o = C \tag{41}$$
$$\Rightarrow \ c^o = \bar{k}C/(\bar{k}+ks^o) \ , \ p^o = ks^oC/(\bar{k}+ks^o)$$

Sei zunächst $s^o>0$. Im Falle $C=0$ ist die Aussage trivial, sei also auch $C>0$. Dann sind $s^o,c^o,p^o > 0$ und wegen des starken Maximumprinzips auch $s(x,t), c(x,t), p(x,t) > 0$ für alle $t>0$ und $x\in\Omega$.

Damit definiert man eine Ljapunovfunktion

$$L(s,c,p) := \int_\Omega (\varphi(s,s^o) + \varphi(c,c^o) + \varphi(p,p^o))\, dx$$

mit $\varphi(u,u^o) := u \ln(u/u^o) - u + u^o \quad (u^o>0)$.

Es ist offenbar $\varphi(u,u^o) \geq 0 \ \ \forall u\geq 0$, und

$\varphi(u,u^o) = 0 \Leftrightarrow u=u^o$.

Mit dieser Definition erhält man

$$\frac{d}{dt} L(s,c,p)(t) = \int_\Omega (\dot{s}\ln(s/s^o) + \dot{c}\ln(c/c^o) + \dot{p}\ln(p/p^o))\,dx$$

$$= \int_\Omega (D_s\Delta s \ln(s/s^o) + D_c\Delta c \ln(c/c^o) + D_p\Delta p \ln(p/p^o))\,dx$$

$$+ \int_\Omega \ln\left(\frac{s}{s^o}\frac{c}{c^o}\frac{p^o}{p}\right)(\bar{k}p - ksc)\,dx$$

$$= -\int_\Omega \left(D_s\frac{(\nabla s)^2}{s} + D_c\frac{(\nabla c)^2}{c} + D_p\frac{(\nabla p)^2}{p} + \ln\frac{\bar{k}p}{ksc}(\bar{k}p - ksc)\right)dx$$

$$\leq 0 \qquad (\text{da } \bar{k}p^o = ks^oc^o)$$

$L(s,c,p)(t)$ ist also monoton fallend in t und

(42) $\qquad \lim_{t\to\infty} L(s,c,p)(t) =: a \geq 0$

Deshalb ist $\int_T^\infty |\frac{d}{dt} L(s,c,p)(t)|dt < \infty$, und es gibt eine Folge $t_n \to \infty$ mit $|\frac{d}{dt} L(s,c,p)(t_n)| \to 0$, so daß wegen der Beschränktheit der Lösungen

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (\nabla s(x,t_n))^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (\nabla c(x,t_n))^2 dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (\nabla p(x,t_n))^2 dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \ln \frac{\bar{k}p(x,t_n)}{ks(x,t_n)c(x,t_n)} (\bar{k}p(x,t_n) - ks(x,t_n)c(x,t_n))dx$$

$$= 0 .$$

Aus der Poincaré-Ungleichung (Verallgemeinerung von Lemma 4a auf beliebige Raumdimension, z. B. in [20])

folgt $\qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (s(x,t_n) - s^0)^2 \, dx = 0$

und aus Lemma 11a

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (\bar{k}p(x,t_n) - ks(x,t_n)c(x,t_n))^2 \, dx = 0$$

Die beiden übrigen Konvergenzaussagen für $\int(\nabla c)^2 dx$ und $\int(\nabla p)^2 dx$ liefern mit der entsprechenden Verallgemeinerung von Lemma 4c (siehe VII,§8 Satz 1 in [9])

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (c(x,t_n) - \bar{c}_n)^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (p(x,t_n) - \bar{p}_n)^2 dx = 0$$

wobei $\bar{c}_n$ und $\bar{p}_n$ die Mittelwerte

$$\bar{c}_n := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega c(x,t_n)dx \ , \quad \bar{p}_n := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega p(x,t_n)dx \ \text{ sind.}$$

Es folgt $\bar{c}_n + \bar{p}_n = C$. Die Folge $(\bar{c}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und hat eine konvergente Teilfolge $(\bar{c}_{n_\kappa})_{\kappa\in\mathbb{N}}$ mit

$\lim_{\kappa\to\infty} \bar{c}_{n_\kappa} =: \bar{c}$, $\bar{p} := C - \bar{c}$. Dann ist

$$\lim_{\kappa\to\infty} \int_\Omega (c(x,t_{n_\kappa}) - \bar{c})^2 dx = \lim_{\kappa\to\infty} \int_\Omega (p(x,t_{n_\kappa}) - \bar{p})^2 dx = 0 .$$

Damit folgt auch

$$\int_\Omega |s(x,t_{n_\kappa})c(x,t_{n_\kappa}) - s^o\bar{c}|\,dx \leq \sup_{t\geq T} \|c(.,t)\|_2 \|s(.,t_{n_\kappa})-s^o\|_2 + |\Omega|^{1/2} s^o \|c(.,t_{n_\kappa}) - \bar{c}\|_2$$

$$\to 0 \text{ , so daß}$$

$$\bar{c} = \frac{\bar{k}c}{\bar{k}+ks_o} \Rightarrow \bar{c}=c^o \text{ , } \bar{p}=p^o$$

Damit ist gezeigt: $L^2\text{-}\lim_{\kappa\to\infty} (s,c,p)(.,t_{n_\kappa}) = (s^o,c^o,p^o)$.

Nach Lemma 11b ist $\varphi(u,u^o) \leq (u-u^o)^2/u^o$ und daher

$$\lim_{\kappa\to\infty} L(s,c,p)(t_{n_\kappa}) \leq \frac{1}{\min(s^o,c^o,p^o)} \int_\Omega ((s(x,t_{n_\kappa})-s^o)^2 + (c(x,t_{n_\kappa})-c^o)^2 + (p(x,t_{n_\kappa})-p^o)^2)\,dx$$

$$= 0 \text{ ,}$$

so daß aus (42) folgt

$$0 \leq a = \lim_{t\to\infty} L(s,c,p)(t) = \inf_{t\geq T} L(s,c,p)(t) \leq \inf_{\kappa\in N} L(s,c,p)(t_{n_\kappa}) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ .}$$

Schließlich ist nach Lemma 11b $\varphi(u,u^o) \geq \frac{(u-u^o)^2}{2\max(u,u^o)}$

$$\Rightarrow \int_\Omega ((s(x,t)-s^o)^2 + (c(x,t)-c^o)^2 + (p(x,t)-p^o)^2)\,dx \leq 2 \max(s^o,c^o,p^o, \sup_{\tau\geq T}\|s(.,\tau)\|_\infty, \sup_{\tau\geq T}\|c(.,\tau)\|_\infty, \sup_{\tau\geq T}\|p(.,\tau)\|_\infty) L(s,c,p)(t)$$

$$\to 0 \quad \text{für} \quad t\to\infty \quad \Rightarrow$$

$$(43) \qquad L^2\text{-}\lim_{t\to\infty} (s(.,t),c(.,t),p(.,t)) = (s^o,c^o,p^o)$$

Auf die weitergehende Behauptung (40) kommen wir am Schluß dieses Beweises zurück.

Zunächst soll der Fall $s^o=0$ betrachtet werden.

Dann ist $s^o = p^o = 0$ und $c^o = C$.

Wenn nicht bereits die Anfangsbedingungen $s_o \equiv p_o \equiv 0$ sind, so folgt aus dem starken Maximumprinzip

$s(x,t) > 0$, $p(x,t) > 0$ für alle $x \in \Omega$, $t>0$ und

$\frac{\partial s}{\partial n}(x,t) < 0$ für alle $x \in \partial\Omega$, $t>0$.

Damit ist $\frac{d}{dt}\int_\Omega (s(x,t)+p(x,t))dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial s}{\partial n}(x,t)dx < 0$

$$(44) \qquad \lim_{t\to\infty} \int_\Omega (s(x,t)+p(x,t))dx = \inf_{t\geq T} \int_\Omega (s(x,t)+p(x,t))dx \geq 0$$

und $\left| \int_{T\partial\Omega}^{\infty} \frac{\partial s}{\partial n}(x,t)dx \right| < \infty$

Sei u mit $u(t) = (s(.,t),c(.,t),p(.,t))$ die Lösung in $L^q(\Omega)$, $q>m$. Dann folgt für $0<\beta<1$ aus Korollar 3.3

$$\sup_{t\geq T} \|(-A)^\beta u(t)\|_q \leq \text{const} \Rightarrow \sup_{t\geq T} \|u(t)\|_{C^{1+\nu}} \leq \text{const}$$

für $0 < \nu < 1 - m/q$.

Da $C^{1+\nu}(\bar\Omega)$ kompakt in $C^1(\bar\Omega)$ eingebettet ist, ist die Trajektorie $(u(t))_{t\geq T}$ relativkompakt in $C^1(\bar\Omega)$. Die ω- Limesmenge Ω^+ ist daher nichtleer, kompakt und invariant (Theorem 4.1 in [71]). Sei $(\check s_o, \check c_o, \check p_o) \in \Omega^+$ und $t_n \to \infty$ eine Folge mit

$$(45) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial s}{\partial n}(x,t_n+1)\,dx = 0$$

$(u(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ hat dann einen C^1 - Häufungspunkt $\tilde u_o = (\check s_o, \check c_o, \check p_o)$ in der ω - Limesmenge. $(\check s_o, \check c_o, \check p_o)$ sind die Anfangswerte einer Lösung $(\tilde s, \tilde c, \tilde p)$, die ganz in der Limesmenge liegt. Aus (45) folgt

$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \tilde s}{\partial n}(x,1)dx = 0 \Rightarrow \tilde s(x,t) = 0$ für $x \in \bar\Omega$, $t \in (0,1]$.

Dann ist für $0<t\leq 1$

$$0 = \int_{\partial\Omega} D_s \frac{\partial \tilde s}{\partial n}(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega (\tilde s(x,t)+\tilde p(x,t))dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \tilde p(x,t)dx$$

und $\dot{\tilde{p}} = D_p \Delta \tilde{p} + \bar{k}\tilde{p} \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\int_\Omega \tilde{p}(x,t)dx = \bar{k}\int_\Omega \tilde{p}(x,t)dx$

$\Rightarrow \tilde{p} \equiv 0$; damit ist auch $\tilde{s} \equiv \tilde{p} \equiv 0$ auf $\bar{\Omega}\times(0,\infty)$.

Hiermit folgt aus (44) $\int_\Omega (s(x,t)+p(x,t))dx \to 0$ für $t\to\infty$, und daher ist für jedes Element der ω-Limesmenge $\tilde{s}_o \equiv \tilde{p}_o \equiv 0$ auf $\bar{\Omega}$. Sei nun $(0,\check{c}_o,0) \in \Omega^+$ und gleichzeitig wieder Anfangsfunktion einer Trajektorie $(0,\check{c}(.,t),0)_{t\in[0,\infty)}$. Dann gilt für $\check{c}$:

$\dot{\check{c}} = D_c \Delta \check{c}$, $\int_\Omega \check{c}(x,t)dx = |\Omega|C$, so daß

$\lim_{t\to\infty} \| \check{c}(.,t) - C \|_{C^1} = 0$ folgt.

Dabei wird wegen der Beschränktheit der Limesmenge der Grenzwert C gleichmäßig für $(0,\check{c}_o,0)\in\Omega^+$ approximiert. Sei $\varepsilon>0$ beliebig und $T>0$ so gewählt, daß

$\| \check{c}(.,t) - C \|_{C^1} < \varepsilon$ für alle $t\geq T$, $\check{c}(.,0)\in\Omega^+$. Ist

$(0,\check{c}_o,0) \in \Omega^+$, so folgt aus der Invarianz der Limesmenge, daß es ein $(0,\tilde{\check{c}}_o,0) = (0,\tilde{\check{c}}(.,0),0) \in \Omega^+$ gibt, so daß $\tilde{\check{c}}(.,T) = \check{c}_o$. Damit ist $\| \check{c}_o - C \| = \| \tilde{\check{c}}(.,T) - C \| < \varepsilon$.

Da dies für alle $\varepsilon>0$ gilt, folgt $\check{c}_o = C$ und $\Omega^+ = \{(0,C,0)\}$. Die ω-Limesmenge besteht also nur aus dem Gleichgewicht, dessen asymptotische Stabilität damit nachgewiesen ist.

Im Falle $s^o>0$ approximiert eine gegebene Lösung ebenfalls ihre ω-Limesmenge in C^1, die nichtleer ist. Aus (43) folgt, daß sie nur die stationäre Lösung enthält, also $\lim_{t\to\infty} \|(s(.,t),c(.,t),p(.,t)) - (s^o,c^o,p^o)\|_{C^1} = 0$

Zusammen mit der lokalen Stabilität in C (Korollar 10) folgt die globale asymptotische Stabilität. □

II.7 Numerische Simulation

Zu der Anfangs-Randwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
\dot{s} &= D_s s'' + \bar{k}p - ksc \qquad && s(0,t)=s_0,\ s(1,t)=s_1 \\
\dot{c} &= D_c c'' + \bar{k}p - ksc && c'(0,t)=c'(1,t)=0 \\
\dot{p} &= D_p p'' - \bar{k}p + ksc && p'(0,t)=p'(1,t)=0 \\
& s(x,0)=s_0(x),\ c(x,0)=c_0(x),\ p(x,0)=p_0(x)
\end{aligned} \tag{1}
$$

sollen mit einem numerischen Verfahren Näherungen für die Lösungen berechnet werden. Die Länge des Intervalls wurde bereits auf 1 normiert. Durch weitere Transformationen kann man zwei weitere Parameter eliminieren und zum Beispiel $k=\bar{k}=1$ erreichen.
Das gewählte Verfahren ist ein implizites Einschrittverfahren, wobei aber die Nichtlinearität nur auf dem früheren Zeitschritt ausgewertet wird. Für jeden Zeitschritt ist daher ein lineares Gleichungssystem zu lösen.
Im Innern des in 1 gleich große Abschnitte Δx zerlegten Intervalls $[0,1]$ lautet die Diskretisierung

$$
\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{D}{2(\Delta x)^2}\,(u_{k-1}^{n+1} + u_{k-1}^n - 2(u_k^{n+1} + u_k^n) + u_{k+1}^{n+1} + u_{k+1}^n) \pm q_k^n \tag{2}
$$

Dabei steht u stellvertretend für s,c oder p, D für D_s, D_c oder D_p. u_k^n ist der Wert der Lösung des diskretisierten Gleichungssystem an der Stelle $x_k = k\Delta x$ im Ortsraum zur Zeit $t_n = n\Delta t$. q_k^n ist der Wert der Nichtlinearität

$$
q_k^n = \bar{k}p_k^n - ks_k^n c_k^n \quad . \tag{3}
$$

Mit $\alpha := D\Delta t/(2(\Delta x)^2)$ läßt sich (2) umformen in

$$(4)\qquad (1+\alpha)u_k^{n+1} - \frac{\alpha}{2}(u_{k-1}^{n+1} + u_{k+1}^{n+1}) = u_k^n + \frac{\alpha}{2}(u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n) \pm \Delta t q_k^n$$

Mit den entsprechenden Randbedingungen $s(0)=s_0$, $s(1)=s_1$ $c(-\Delta x)=c(\Delta x)$, $c(1+\Delta x)=c(1-\Delta x)$, $p(-\Delta x)=p(\Delta x)$, $p(1+\Delta x)=p(1-\Delta x)$ führt dies auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ -\frac{\alpha_s}{2} & 1+\alpha_s & -\frac{\alpha_s}{2} & 0 & \\ & -\frac{\alpha_s}{2} & 1+\alpha_s & -\frac{\alpha_s}{2} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -\frac{\alpha_s}{2} & 1+\alpha_s & -\frac{\alpha_s}{2} \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_0^{n+1} \\ s_1^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ s_1^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ -\frac{\alpha_s}{2} & 1+\alpha_s & -\frac{\alpha_s}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-\alpha_s & -\frac{\alpha_s}{2} & \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1^n \\ \vdots \\ s_{1-1}^n \\ s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q_1^n \\ \vdots \\ q_{1-1}^n \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Delta t \qquad (5)$$

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha_c & -\alpha_c & & 0 \\ -\frac{\alpha_c}{2} & 1+\alpha_c & -\frac{\alpha_c}{2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1+\alpha_c & -\frac{\alpha_c}{2} \\ & & -\alpha_c & 1+\alpha_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^{n+1} \\ c_1^{n+1} \\ \vdots \\ c_1^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\alpha_c & \alpha_c & & & \\ \frac{\alpha_c}{2} & 1-\alpha_c & \frac{\alpha_c}{2} & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & 1-\alpha_c & \frac{\alpha_c}{2} & \\ & & \alpha_c & 1-\alpha_c & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_o^n \\ c_1^n \\ \vdots \\ c_1^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_o^n \\ q_1^n \\ \vdots \\ q_1^n \end{pmatrix} \Delta t$$

(5)

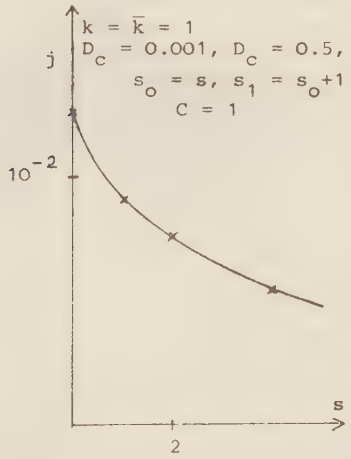
$$\begin{pmatrix} 1+\alpha_p & -\alpha_p & & & \\ -\frac{\alpha_p}{2} & 1+\alpha_p & -\frac{\alpha_p}{2} & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & 1+\alpha_p & -\frac{\alpha_p}{2} & \\ & & -\alpha_p & 1+\alpha_p & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_o^{n+1} \\ p_1^{n+1} \\ \vdots \\ p_1^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\alpha_p & \alpha_p & & & \\ \frac{\alpha_p}{2} & 1-\alpha_p & \frac{\alpha_p}{2} & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & 1-\alpha_p & \frac{\alpha_p}{2} & \\ & & \alpha_p & 1-\alpha_p & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_o^n \\ p_1^n \\ \vdots \\ p_1^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_o^n \\ q_1^n \\ \vdots \\ q_1^n \end{pmatrix} \Delta t$$

Dieses Verfahren ist konsistent. Da bei jedem Zeitschritt nur ein lineares Gleichungssystem zu lösen ist, ist das Verfahren genau dann konvergent, wenn das lineare Verfahren (q=0) konvergent ist [4]. Das lineare Verfahren ist jedoch die gewöhnlich Crank-Nicolson-Methode, die für beliebige $\Delta t/(\Delta x)^2$ stabil und damit konvergent ist [10]. In der Realisierung des Verfahrens werden die drei Gleichungssysteme durch Einzelschritt-Verfahren mit Overrelaxation gelöst.

Die Auswertung der numerischen Simulationen führt zu folgenden Beobachtungen:

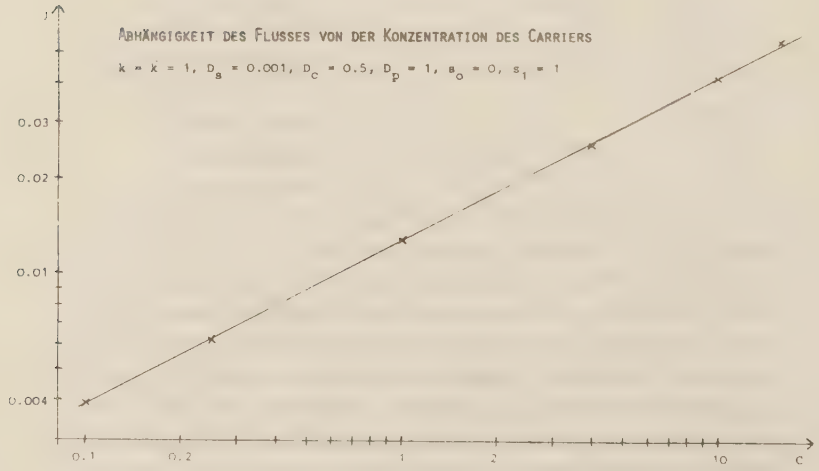
1. Es stellt sich stets ein stationärer Zustand ein.
2. Im Gleichgewicht hängt der Fluß kaum von den Diffusionsraten des beladenen und des unbeladenen Carriers ab. Für kleine Diffusionsraten des Substrats stimmt dies mit der Schlußfolgerung in Abschnitt 5 überein.
3. Die Anwesenheit von Substrat auf der Gegenseite führt zu einer starken Inhibition des Flusses. Dies ist auf der nebenstehenden Abbildung zu erkennen. Die Differenz der Substratkonzentrationen $s_1 - s_o$ wurde dort konstant gehalten und s_o variiert. Dieses Ergebnis enspricht den Erwartungen, da auch die Carriermodelle für "dünne" Membranen (siehe Abschnitt I.5) dieses Verhalten zeigen.



4. Hält man die Substratkonzentration auf einer Seite fest, so nimmt der Fluß mit wachsender Konzentration auf der anderen Seite zu, die Permeabilität nimmt jedoch ab. Insoweit stimmt dieses Verhalten mit den Ergebnissen für die dünne Membran überein, wo der Fluß für große Substratkonzentrationen in Sättigung übergeht. Zieht man jedoch von dem Fluß den bei reiner Diffusion des Substrats erwarteten Fluß ab, so

stellt man überraschenderweise fest, daß der trägervermittelte Fluß bei hohen Substratkonzentrationen wieder abnimmt. Das Substrat kann also seinen eigenen Transport inhibieren. Diesen Effekt kann es nur in einer Membran geben, in der der Diffusionsprozeß in mehreren Schritten abläuft. Bei einer dünnen Membran kann der Fluß nur durch Substrat auf der Gegenseite verringert werden.

5. Bei kleiner Diffusionsrate des Substrats steigt die trägervermittelte Transportrate mit der Quadratwurzel der Carrierdichte an. Dies stimmt mit den Ergebnissen aus der asymptotischen Entwicklung überein. Bei einer dünnen Membran würde man dagegen eine lineare Abhängigkeit erwarten.



REAKTIONSKONSTANTEN: K1 = 1.000, K2 = 1.000

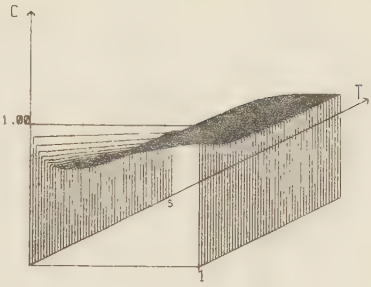
DIFFUSIONSKONSTANTEN: DS=0.010, DC= 0.01, DP= 1.00

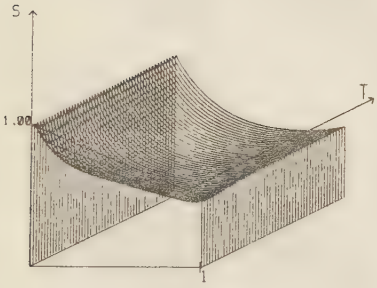
CARRIER = 1.000

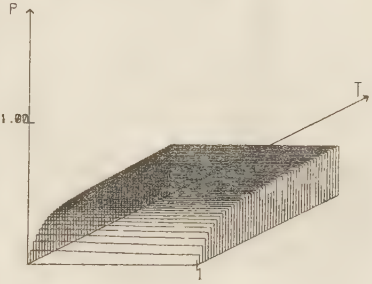
S = SUBSTRAT

C = UNBELADENER CARRIER

P = BELADENER CARRIER







REAKTIONSKONSTANTEN: K1 = 1.000, K2 = 1.000

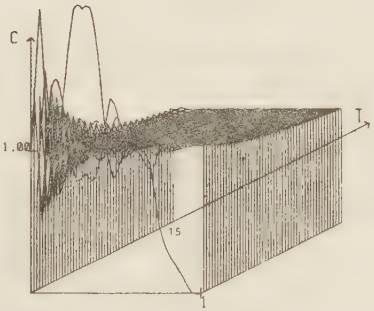
DIFFUSIONSKONSTANTEN: DS=0.010, DC= 1.00, DP= 0.01

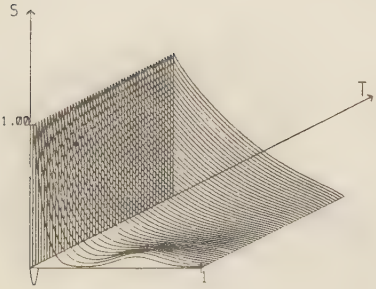
CARRIER = 1.000

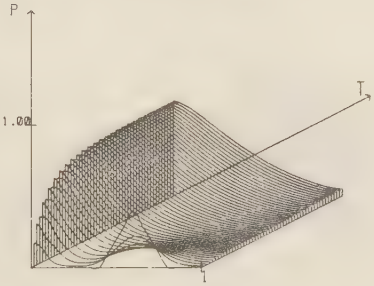
S = SUBSTRAT

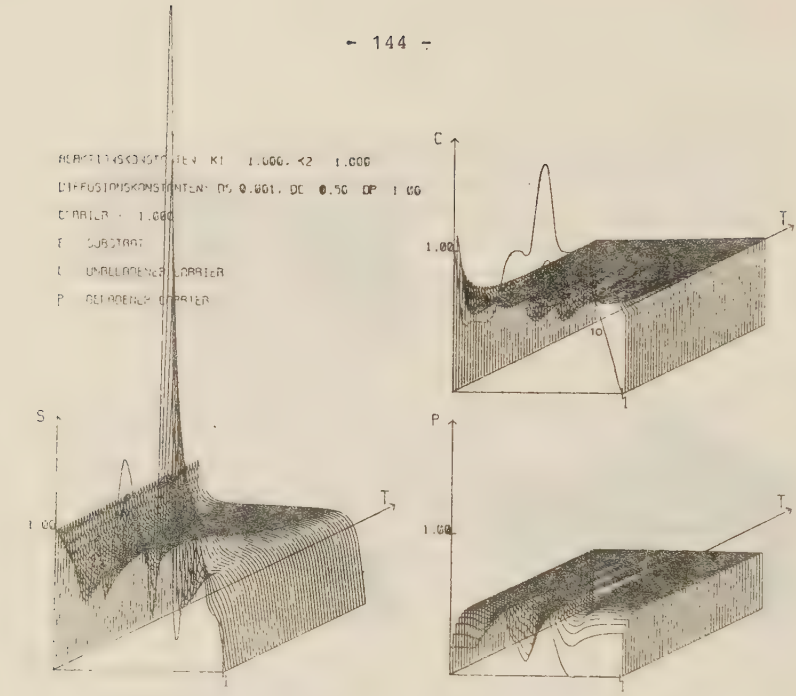
C = UNBELADENER CARRIER

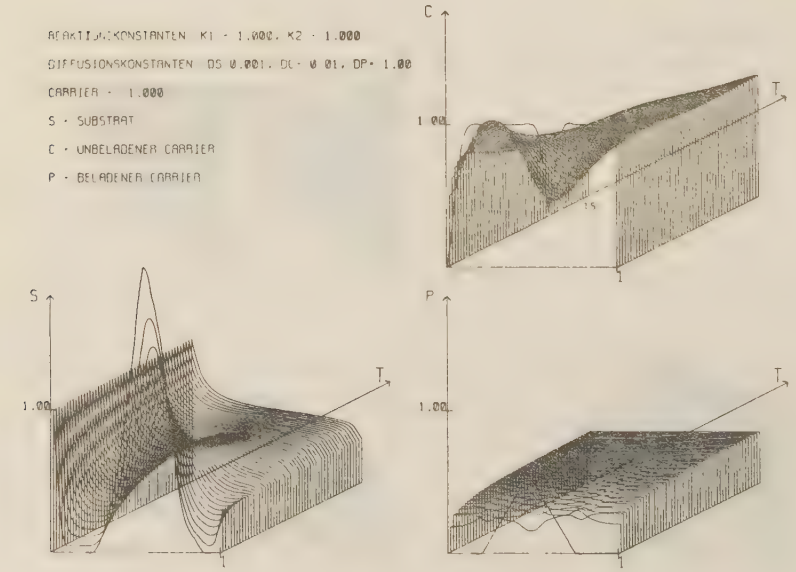
P = BELADENER CARRIER








C
T
1.00
10
1
S
T
1.00
1
P
T
1.00
1


C
T
1.00
15
1
S
T
1.00
1
P
T
1.00
1

REAKTIONSKONSTANTEN: K1 = 1.000, K2 = 1.000

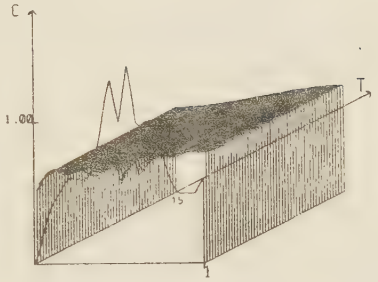
DIFFUSIONSKONSTANTEN: DS = 0.00, DC = 0.30, DP = 1.00

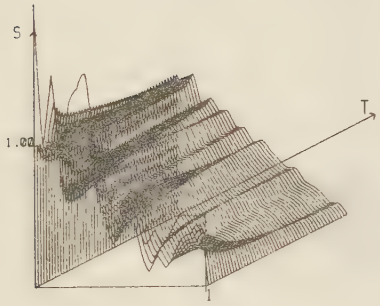
CARRIER = 1.000

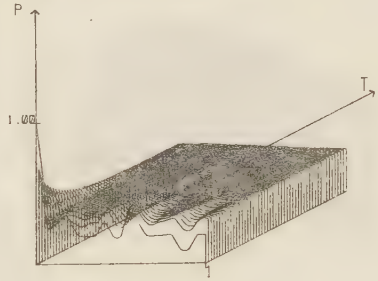
S = SUBSTRAT

C = UNBELADENER CARRIER

P = BELADENER CARRIER







REAKTIONSKONSTANTEN: K1 = 1.000, K2 = 1.000

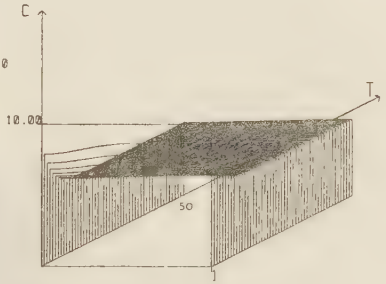
DIFFUSIONSKONSTANTEN: DS=0.100, DC= 0.10, DP= 0.10

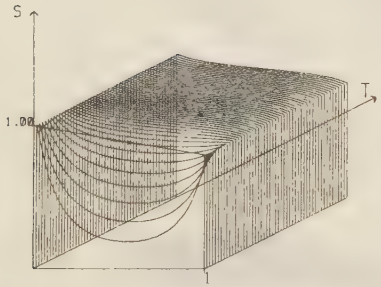
CARRIER = 10.000

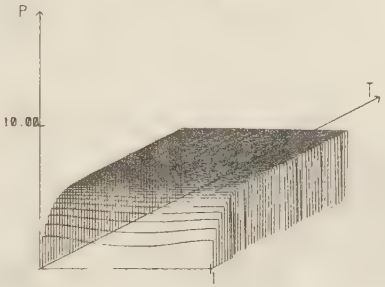
S = SUBSTRAT

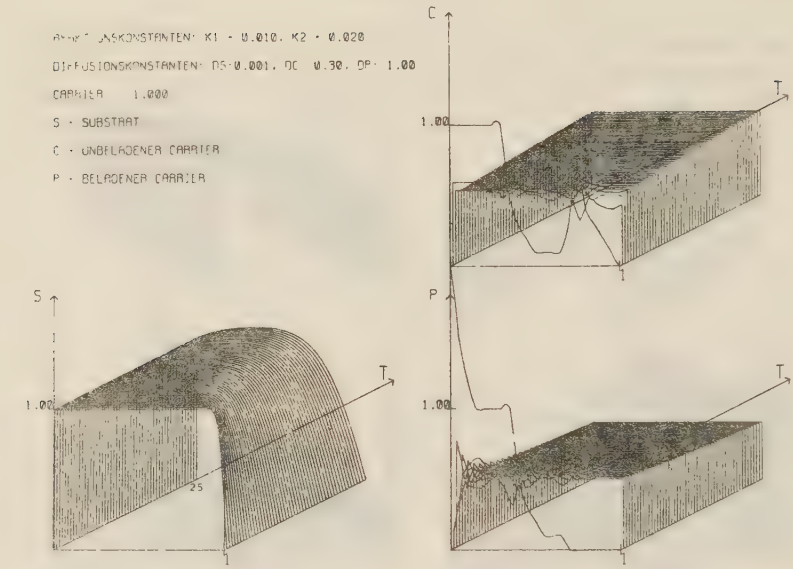
C = UNBELADENER CARRIER

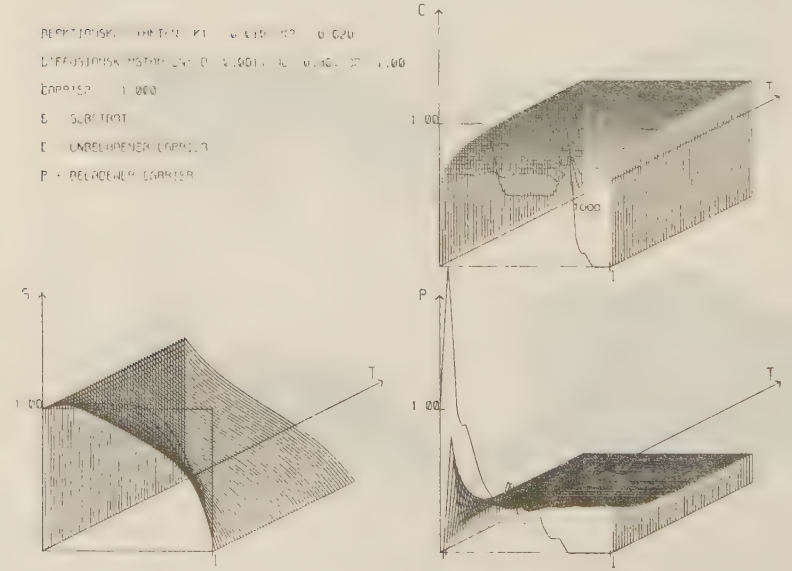
P = BELADENER CARRIER





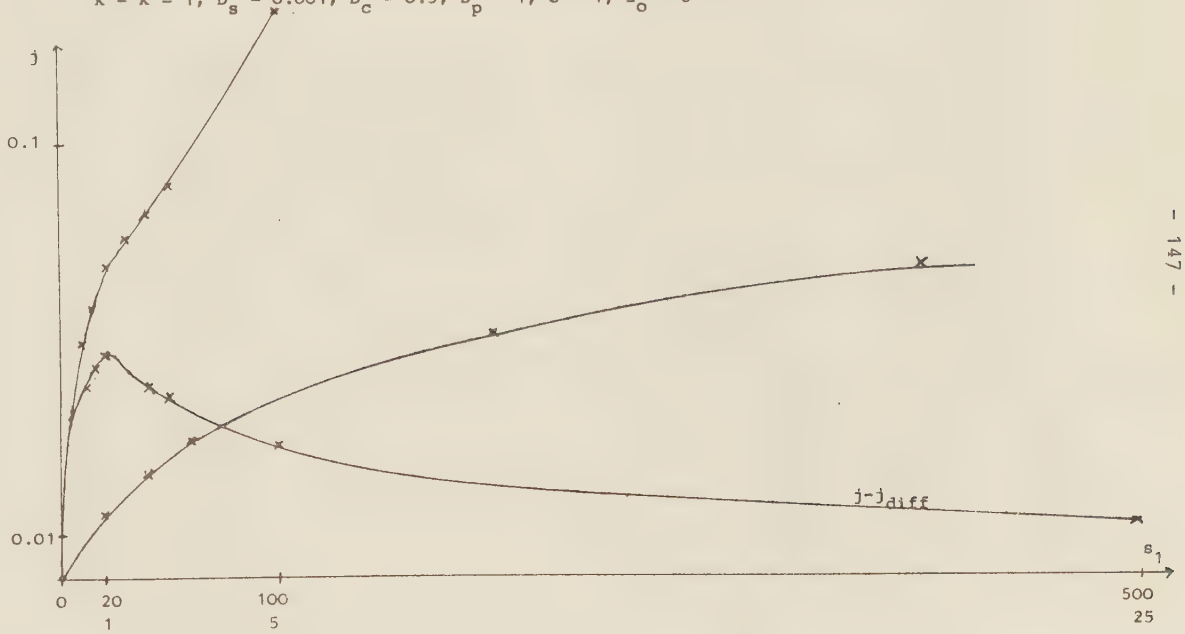



REAKTIONSKONSTANTEN: K1 = 0.010, K2 = 0.020
DIFFUSIONSKONSTANTEN: DS=0.001, DC 0.30, DP= 1.00
CARRIER 1.000
S = SUBSTRAT
C = UNBELADENER CARRIER
P = BELADENER CARRIER
C
1.00
T
P
1.00
T
S
1.00
25
T


C
1.00
T
P
1.00
T
S
1.00
T

ABHÄNGIGKEIT DES FLUSSES VON DER KONZENTRATION DES SUBSTRATS

$k = \bar{k} = 1$, $D_s = 0.001$, $D_c = 0.5$, $D_p = 1$, $C = 1$, $s_o = 0$



III. VERALLGEMEINERUNGEN

In Kapitel II wurde ein spezielles Reaktions-Diffusionsmodell für den erleichterten Transport einer Substanz durch eine Membran untersucht. Dieses Modell kann in unterschiedliche Richtungen verändert und verallgemeinert werden.

a) In biologischen Systemen hat man es in Wirklichkeit nicht mit unendlich ausgedehnten, ebenen und homogenen Membranen zu tun. Sobald man aber die räumliche Struktur mitberücksichtigt, kann man die Untersuchung nicht mehr auf die eine Raumdimension senkrecht zur Membranoberfläche beschränken. Gefäße oder Zellen etwa führen in natürlicher Weise zu zwei oder drei Raumdimensionen.

b) Die chemischen Reaktionen im Innern der Membran können komplizierter sein als die Zerfallsreaktionen und Zweierzusammenstöße, die wir bisher angenommen haben. An einer Reaktion können mehr als zwei Moleküle beteiligt sein, und sie kann in mehreren Schritten ablaufen. Im Innern einer Membran können auch Enzyme vorhanden sein, die die Reaktionen katalysieren. Solche Systeme wurden von Kernevez u.a. untersucht, allerdings nicht im Hinblick auf erleichterten Transport [83]. Daher liegt es nahe, die Reaktionsterme zu verallgemeinern und zu untersuchen, inwieweit Beschränktheits- und Monotonievoraussetzungen für die gewünschten Aussagen ausreichend sind.

c) Aus den Überlegungen in Kapitel I, die zur Herlei-

tung unseres Standardmodells führten, wurde bereits deutlich, daß die Gültigkeit der Randbedingungen an bestimmte Voraussetzungen gebunden ist: Die Membranoberfläche muß für die zu transportierende Substanz gut durchlässig sein, und es gibt keine Randschicht, in der andere Reaktionen ablaufen als im Innern der Membran. Es ist daher plausibel, daß es sinnvoll ist, die Randbedingungen zu verallgemeinern; allerdings wird dadurch das System wesentlich komplizierter, da die Randbedingungen gekoppelt und nichtlinear sein können.

d) Schließlich können am Transportprozeß mehr als drei Spezies beteiligt sein. Insbesondere wäre es interessant, Systeme mit mehreren Transportsystemen für eine Substanz oder mit einem Transportsystem für mehrere Substanzen zu betrachten.

III.1 Lokale Existenz

Die lokale Existenz von Lösungen für Systeme von schwach gekoppelten semilinearen parabolischen Anfangs-Randwert-aufgaben soll mit einem Fixpunktsatz nachgewiesen werden. Dazu müssen zunächst die inhomogenen linearen Anfangs-Randwertprobleme untersucht und deren Lösungen geeignet abgeschätzt werden:

2. Randwertaufgabe

$$(1)\qquad \begin{aligned} &Lu = f(x,t) && \text{auf } \Omega\times(0,T) && (0<T\leq\infty)\\ &\frac{\partial u}{\partial n} = g(x,t) && \text{auf } \partial\Omega\times(0,T)\\ &u(x,0) = u_0(x) && \text{auf } \Omega \text{ , d.h. } \lim_{t\to 0} u(x,t)=u_0(x) \quad \forall x\in\Omega \end{aligned}$$

1. Randwertaufgabe

$$(2)\qquad \begin{aligned} &Lv = f(x,t) && \text{auf } \Omega\times(0,T)\\ &v = h(x,t) && \text{auf } \partial\Omega\times(0,T), \text{ d.h.}\\ &&& \lim_{\substack{\tilde{x}\to x\\ \tilde{x}\in\Omega}} v(x,t)=g(x,t)\ \forall x\in\partial\Omega, t>0\\ &v(x,0) = u_0(x) && \text{auf } \Omega \text{ ,d.h. } \lim_{t\to 0} v(x,t)=u_0(x) \quad \forall x\in\Omega \end{aligned}$$

Dabei sei L der parabolische Operator

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \Big(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,t)\Big)$$

und $\frac{\partial u}{\partial n}$ sei auf $\partial\Omega$ die Ableitung von u in der äußeren konormalen Richtung

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,t)\cos(n(x),x_j)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

n(x) ist der Einheitsvektor in Richtung der äußeren Normalen in einem Punkt $x\in\partial\Omega$.

Die folgenden Generalvoraussetzungen über L und Ω sollen für den gesamten Abschnitt erfüllt sein:

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei ein beschränktes Gebiet, dessen Rand $\partial\Omega$ für $m>1$ eine $(m-1)$-dimensionale $C^{1+\alpha}$-Mannigfaltigkeit ist $(\alpha\in(0,1])$. Die Matrix $a(x,t) = (a_{ij}(x,t))_{m\times m}$ sei für alle $(x,t) \in \bar{\Omega}\times[0,T)$ symmetrisch und positiv definit, und $a_{ij}, b_i \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}\times[0,T))$; dabei ist

$$C^{\alpha,\alpha/2} = \{u:\Omega\times[0,T)\to\mathbb{R} \mid \|u\|_{\alpha,\alpha/2} = \|u\|_\infty + \sup_{\substack{x,y,\\ s,t}} \frac{|u(x,t)-u(y,s)|}{|x-y|^\alpha+|t-s|^{\alpha/2}} < \infty \}$$

Für den Fall (2) gelte zusätzlich (siehe IV,§11 in [40]) a_{ij} differenzierbar nach x für $1\le i,j\le m$ und

$|\nabla a(x,t) - \nabla a(y,t)| \le \text{const}\ |x-y|^\alpha \ \forall x,y\in\bar{\Omega}$ und $0\le t<T$.

Die Koeffizienten können dann mit derselben Glattheit unter Beibehaltung der Norm auf $\mathbb{R}^m\times[0,T)$ fortgesetzt werden. OBdA werde daher angenommen, daß sie bereits auf $\mathbb{R}^m\times[0,T)$ definiert seien (III,1 Theorem 2 in [18]).

Unter den gegebenen Voraussetzungen gibt es zu dem parabolischen Operator eine Fundamentallösung auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$ bzw. auf $\mathbb{R}^m\times[0,T)$ ([53],[18], IV § 11 in [40]), mit deren Hilfe Lösungen von (1) und (2) als Summe von Potentialen konstruiert werden sollen.

Die Fundamentallösung läßt sich folgendermaßen darstellen (IV, (11.13) in [40]):

$$(3)\quad \begin{cases} \Gamma(x,t,\xi,\tau) = \Gamma_0(x,t,\xi,\tau) + \Gamma_1(x,t,\xi,\tau) \quad \text{mit} \\ \Gamma_0(x,t,\xi,\tau) = \dfrac{\exp\left(-\sum_{i,j=1}^{m} \frac{a^{-1}_{ij}(\xi,\tau)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{4(t-\tau)}\right)}{((4\pi(t-\tau))^m \det A(\xi,\tau))^{1/2}} \\ \Gamma_1(x,t,\xi,\tau) = \int_\tau^t \int_{\mathbb{R}^m} \Gamma_0(x,t,\eta,\sigma) Q(\eta,\sigma,\xi,\tau)\, d\eta d\sigma \end{cases}$$

Die a_{ij}^{-1} sind die Elemente der Matrix a^{-1}.

Γ_1 ist differenzierbar nach x, und es gilt

$$D_x\Gamma_1(x,t,\xi,\tau) = \int_\tau^t \int_{\mathbb{R}^m} D_x\Gamma_o(x,t,\eta,\sigma)Q(\eta,\sigma,\xi,\tau)\,d\eta\,d\sigma$$

mit $D_x{}^k = (\frac{\partial\Gamma_k}{\partial x_i})_{i=1,..m}$

Ferner gibt es Konstanten c_o und c_1, die von L und $T<\infty$ abhängen, so daß für Γ, Γ_o, Γ_1 und Q folgende Abschätzungen gelten (aus IV, §11, §13, §15 und §16 in [40]):

$$|D_t^l D_x^k\Gamma_o(x,t,\xi+x,\tau)-D_t^l D_x^k\Gamma_o(y,t,\xi+y,\tau)| \quad (k,l\in\mathbb{N}_o)$$

$$(4) \qquad \leq \frac{c_1|x-y|^\alpha}{(t-\tau)^{(n+k+2l)/2}}\, e^{-\frac{c_o\xi^2}{t-\tau}}$$

$$(5) \quad |D_t^l D_x^k\Gamma_o(x,t,\xi,\tau)| \leq \frac{c_1}{(t-\tau)^{(n+k+2l)/2}}\, e^{-c_o\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} \qquad (k,l\in\mathbb{N}_o)$$

$$(6) \quad |D_t^l D_x^k\Gamma(x,t,\xi,\tau)| \leq \frac{c_1}{(t-\tau)^{(n+k+2l)/2}}\, e^{-c_o\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}$$

$$(6a) \quad |D_t^l D_x^k D_\xi\Gamma(x,t,\xi,\tau)| \leq \frac{c_1}{(t-\tau)^{(n+k+2l+1)/2}}\, e^{-c_o\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}$$

im Fall (2)

(6) und (6a) gelten für $k=0,1,2;\ l=0,1;\ 2k+l\leq 2$.

$$\left.\begin{array}{l} |D_x^2\Gamma(x,t,\xi,\tau) - D_x^2\Gamma(y,t,\xi,\tau)| \\ D_t|(x,t,\xi,\tau) - D_t\Gamma(y,t,\xi,\tau)| \end{array}\right\}$$

$$(7) \qquad \leq \frac{c_1|x-y|^{\alpha/2}}{(t-\tau)^{(n+2+\alpha/2)/2}}\, e^{-c_o\frac{\min((x-\xi)^2,(y-\xi)^2)}{t-\tau}}$$

$$(8)\qquad |Q(x,t,\xi,\tau)| \leq \frac{c_1}{(t-\tau)^{(n+2-\alpha)/2}}\, e^{-c_o\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} |\frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau)| \leq \frac{c_1}{(t-\tau)^{(n+1-\alpha)/2}}\, e^{-c_o\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} \\ |\frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x,t,\xi,\tau)| \leq \frac{c_1}{(t-\tau)^{(n+1-\alpha)/2}}\, e^{-c_o\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} \end{cases} \quad \text{im Fall (2)}$$

für $x,\xi \in \partial\Omega$

Dabei sind $\frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}$ und $\frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}$ wieder die jeweiligen Ableitungen in der konormalen Richtung:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x,t)\cos(n(x),x_j)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}(x,t,\xi,\tau);$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x,t,\xi,\tau) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\xi,\tau)\cos(n(\xi),\xi_j)\,\frac{\partial\Gamma}{\partial \xi_i}(x,t,\xi,\tau)$$

existiert nur für $a \in C^{1+\alpha}$

Es sollen noch einige Ergebnisse über die Potentiale zusammengestellt werden ([53],[54],[40]):

a) Potential einer Raumladung

Sei $f \in L^\infty(\Omega\times(0,T))$. Dann ist das Potential

$$(10)\qquad \begin{cases} P_1 f\ (x,t) := V(x,t) = \int_o^t\int_\Omega \Gamma(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\ \text{auf } \mathbb{R}^m\times[0,T] \text{ definiert, nach x differenzierbar:} \\ D_x V\ (x,t) = \int_o^t\int_\Omega D_x\Gamma(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\ \text{und V und } D_x V \text{ sind hölderstetig auf } \mathbb{R}^m\times[0,T]\ , \\ \text{insbesondere also auf } \bar{\Omega}\times[0,T). \end{cases}$$

(11) Ist zusätzlich für alle $t\in(0,T)$ $f(.,t)$ hölderstetig auf Ω, so existieren $D_t V$ und $D_x^2 V$ in $\Omega\times[0,T)$, und es ist $LV=f$.

b) Sei $u_o \in L^\infty(\Omega)$. u_o sei unter Erhaltung der Norm (z.B. durch 0) fortgesetzt auf $\mathbb{R}^m$. Dann ist

(12)
$$\begin{cases} P_2 u_o\ (x,t) := V(x,t) = \int_{\mathbb{R}^m} \Gamma(x,t,\xi,0)\, u_o(\xi)\, d\xi \\ \text{auf } R^m{}_x(0,T) \text{ definiert und beschränkt, hat partielle Ableitungen für } (k,l) = (1,0),(2,0),(0,1) \\ D_t^l D_x^k V(x,t) = \int_{\mathbb{R}^m} D_t^l D_x^k \Gamma(x,t,\xi,0)\, u_o(\xi)\, d\xi \ , \\ \text{und es ist } LV = 0 \text{ auf } \Omega_x(0,T). \end{cases}$$

Ist u_o zusätzlich stetig auf $\overline{\Omega}$, so ist

(13) $\lim_{t \to 0} V(x,t) = u_o(x)$ für alle $x \in \Omega$, und mit
$V(x,0) := u_o(x)$ ist V stetig auf $\Omega \times [0,T)$.

Hieraus folgt sofort: Ist u_o stetig auf $\overline{\Omega}$, so ist (bei entsprechender Fortsetzung von u_o) V stetig auf $\overline{\Omega} \times [0,T)$.

c) Potential einer einfachen Schicht

Sei $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega \times (0,T))$. Dann ist das Potential

(14)
$$\begin{cases} P_3\varphi\ (x,t) := V(x,t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} \Gamma(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \\ \text{stetig auf } \mathbb{R}^m \times [0,T) \text{ mit } V(x,0)=0. \\ \text{Auf } (\mathbb{R}^m \setminus \partial\Omega) \times (0,T) \text{ hat V partielle Ableitungen} \\ D_t^l D_x^k V(x,t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} D_t^l D_x^k \Gamma(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \quad \text{für} \\ (k,l) = (1,0),(2,0),(0,1) \ , \text{ und es ist } LV = 0. \end{cases}$$

Ist φ zusätzlich stetig auf $\partial\Omega \times (0,T)$, so ist

(15) $$\frac{\partial V}{\partial n}(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x,t) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)\, d\xi d\tau$$
für $(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$.

d) Potential einer Doppelschicht

Sei $\mu \in L^\infty(\partial\Omega \times (0,T))$. Dann ist das Potential

(16) $\left\{\begin{array}{l} P_4\mu\ (x,t) := V(x,t) = \int_0^t\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)\,d\xi d\tau \\ \text{beschränkt und stetig auf } (\mathbb{R}^m\setminus\partial\Omega)\times(0,T), \text{ hat} \\ \text{dort partielle Ableitungen } D_x, D_x^2 \text{ und } D_t, \text{ und es} \\ \text{ist } LV = 0. \text{ Für } x\in\Omega \text{ gilt } \lim_{t\to 0} V(x,t) = 0\ . \end{array}\right.$

Ist μ zusätzlich stetig auf $\partial\Omega\times(0,T)$, so ist

(17) $\left\{\begin{array}{l} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} V(x,t) = \frac{1}{2}\mu(x,t) + \int_0^t\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x_0,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)\,d\xi d\tau \\ \text{Definiert man auf diese Weise die Werte von V auf} \\ \text{dem Rand, so ist V stetig auf } \overline{\Omega}\times(0,T). \end{array}\right.$

Diese Zusammenstellung soll durch die folgenden Überlegungen und Abschätzungen ergänzt werden:

a) Sei $f \in L^\infty(\Omega\times(0,T))$. Dann ist für $(x,t) \in \overline{\Omega}\times[0,T)$

(18) $|P_1 f(x,t)| \le \text{const}\ t\,\|f\|_\infty$

(19) $|\frac{\partial}{\partial n}P_1 f\ (x,t)| \le \text{const}\ t^{1/2}\,\|f\|_\infty$ für $x\in\partial\Omega, 0\le t\le T$.

Die Konstanten hängen nur von Ω, T und L ab, und von L nur über c_0 und c_1 aus den Abschätzungen für die Fundamentallösungen.

b) Sei $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Dann ist

(20) $|P_2 u_0\ (x,t)| \le \text{const}\ \|u_0\|_\infty$ für $x\in\overline{\Omega}$, $0<t\le T$

(21) $|\frac{\partial}{\partial n}P_2 u_0\ (x,t)| \le \text{const}\ t^{-1/2}\,\|u_0\|_\infty$ für $x\in\partial\Omega$, $0<t\le T$.

Falls u_0 bis zum Rand hölderstetig ist, d.h.

$u_0 \in C^\delta(\overline{\Omega})$, $0<\delta\le\alpha$, so läßt sich u_0 unter Beibehaltung der Norm auf $\mathbb{R}^m$ fortsetzen und $\forall x\in\partial\Omega, t\in(0,T)$

(22) $|\frac{\partial}{\partial n}P_2 u_0\ (x,t)| \le \text{const}\ t^{-(1-\delta)/2}\,\|u_0\|_{C^\delta}$

Die Konstanten hängen nur von Ω, T und L(c_0 und c_1) ab.

c) Sei φ meßbar auf $\partial\Omega\times(0,T)$ und fast überall $|\varphi(x,t)| \leq \bar{\varphi}\, t^{\gamma-1/2}$ mit $\bar{\varphi}>0$, $\gamma\geq 0$. Dann ist $P_3\varphi$ stetig auf $\bar{\Omega}\times[0,T)\setminus\partial\Omega\times\{0\}$ und

(23) $|P_3\varphi(x,t)| \leq \text{const}\ \bar{\varphi}\, t^{\gamma}$. In $\Omega\times(0,T)$ sind die partiellen Ableitungen mit dem Integral vertauschbar, und es ist $LP_3\varphi = 0$. Außerdem gilt im Falle der Stetigkeit von φ auf $\partial\Omega\times(0,T)$ für $x\in\partial\Omega, 0<t<T$

$$\frac{\partial}{\partial n}P_3\varphi\ (x,t) = \frac{1}{2}\,\varphi(x,t) + \int_0^t\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)\, d\xi d\tau$$

(24) Falls $\gamma>0$, so ist $P_3\varphi$ stetig auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$, d.h. $\lim_{\substack{x\to x_o\\ t\to 0}} P_3\varphi\ (x,t) = 0$ für alle $x_o \in \bar{\Omega}$.

d) Sei μ meßbar und $|\mu(x,t)| \leq \bar{\mu}\, t^{\gamma}$ für fast alle $(x,t) \in \partial\Omega\times(0,T)$; $\gamma\geq 0$. Dann ist

(25) $|P_4\ \mu(x,t)| \leq \text{const}\ \bar{\mu}\, t^{\gamma}$, und falls μ stetig ist auf $\partial\Omega\times(0,T)$, so ist $P_4\mu$ stetig auf $\bar{\Omega}\times[0,T)\setminus\partial\Omega\times\{0\}$.

(26) Falls $\lim_{t\to 0} \mu(x,t) = 0$ gleichmäßig für $x\in\partial\Omega$, d.h. μ stetig auf $\partial\Omega\times[0,T)$ mit $\mu(x,0)=0\ \forall x\in\partial\Omega$, so ist $P_4\mu$ stetig auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$.

Für die Beweise von (18) bis (26) wird das folgende Lemma gebraucht:

1.1 Lemma

Für $t>0$ und $x\in\mathbb{R}^m$ gilt

$$\int_\Omega e^{-c_1\frac{(x-\xi)^2}{t}}\, d\xi \leq c_2\, t^{m/2},\quad \int_{\partial\Omega} e^{-c_1\frac{(x-\xi)^2}{t}}\, d\xi \leq c_2\, t^{\frac{m-1}{2}}$$

c_2 hängt nur von Ω (bzw. $\partial\Omega$) und c_1 ab. Von $\partial\Omega$ wird nur gebraucht, daß es eine kompakte (m-1)-dimensionale C^1-

Mannigfaltigkeit ist.

Beweis: $\int_\Omega e^{-c_1 \frac{(x-\xi)^2}{t}} d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^m} e^{-c_1 \frac{\xi^2}{t}} d\xi = (\frac{\pi t}{c_1})^{\frac{m}{2}}$.

Zu jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Kugel $K_{2r_x}(x)$ mit Mittelpunkt x und Radius $2r_x$, so daß

(27) $\partial\Omega \cap K_{2r_x}(x)$ durch $y^i = \lambda_x(y^1,..y^{i-1},y^{i+1},..y^m)$,

λ_x stetig differenzierbar, darstellbar ist. Die Kugeln $K_{r_x}(x)$, $x \in \partial\Omega$ bilden eine offene Überdekkung von $\partial\Omega$, aus der man eine endliche $\mathcal{O} = \{K_{r_{x_i}}(x_i) \mid i=1,..p\}$ auswählen kann. Sei

$r := \min \{ r_{x_i} \mid i=1,..p \}$. Jedes $x \in \partial\Omega$ liegt in einem $K_{r_{x_j}}(x_j)$. $\partial\Omega \cap K_{2r_{x_j}}(x_j)$ ist durch lokale C^1-Koordinaten darstellbar, und wegen $K_r(x) \subset K_{r_{x_j}}(x) \subset K_{2r_{x_j}}(x_j)$ gilt dies auch für $\partial\Omega \cap K_r(x)$. Darstellungen der Form (27) lassen sich daher um jeden Punkt $x \in \partial\Omega$ für Umgebungen finden, deren Größe unabhängig von x ist, und für die ferner gilt

$$\sup \{ |\frac{\partial \lambda_x}{\partial y}| \mid x \in \partial\Omega,\ y \in P(K_r(x) \cap \partial\Omega)\} =: \langle\lambda\rangle < \infty$$

dabei ist P die Projektion auf den entsprechenden $\mathbb{R}^{m-1}$. Nun läßt sich das Integral abschätzen für $x \in \partial\Omega$:

$$\int_{\partial\Omega} e^{-c_o \frac{(x-\xi)^2}{t}} d\xi = \int_{\partial\Omega \cap K_r(x)} \cdots + \int_{\partial\Omega \setminus K_r(x)} \cdots$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{-c_o/t \sum_{i \neq j} (x_i - \xi_i)^2} (1 + \sum_{i \neq j} (\frac{\partial \lambda}{\partial \xi_i}(..))^2)^{1/2} d\xi_1 .. d\xi_{j-1} d\xi_{j+1} .. d\xi_m$$

$$+ \int_{\partial\Omega} e^{-c_o r^2/t} d\xi$$

$$\leq \left(\frac{\pi t}{c_o}\right)^{(m-1)/2} <\lambda> + |\partial\Omega| \left(\frac{t}{c_o r^2}\right)^{(m-1)/2} \sup_{\sigma\geq 0}(\sigma^{(m-1)/2} e^{-\sigma})$$

Falls x nicht auf $\partial\Omega$ liegt, so wähle man $x' \in \partial\Omega$ so, daß der Abstand zwischen x und $\partial\Omega$ $d(x,\partial\Omega) = |x-x'|$ und benutze $|x-\xi| \geq |x-x'|$ für $\xi \in \partial\Omega$,

$|x-\xi| \geq |x'-\xi| - |x-x'| \Rightarrow$

(28) $\quad 2|x-\xi| \geq |x'-\xi|$.

Beweise von (18)-(26):

a) Das Potential der Raumladung f läßt sich abschätzen durch

$$|P_1 f\ (x,t)| \leq \int_o^t \int_\Omega |\Gamma(x,t,\xi,\tau) f(\xi,\tau)| d\xi d\tau$$

$$\leq \|f\|_\infty \int_o^t \int_\Omega \frac{c_1}{(t-\tau)^{m/2}} e^{-c_o \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} d\xi d\tau \qquad \text{nach (6)}$$

$$\leq c_1 c_2 \|f\|_\infty t \qquad \text{(Lemma 1).}$$

Aus (10) und (6) folgt

$$\left|\frac{\partial}{\partial n} P_1 f\ (x,t)\right| \leq \int_o^t \int_\Omega \frac{c_1}{(t-\tau)^{(m+1)/2}} e^{-c_o \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} \|f\|_\infty d\xi d\tau$$

$$\leq c_1 c_2 \|f\|_\infty \int_o^t (t-\tau)^{-1/2} d\tau$$

$$\leq 2 c_1 c_2 \|f\|_\infty t^{1/2}$$

Dabei hängt c_1 nur von L, T, Ω und c_2 nur von c_o, also auch nur von L ab.

b) Aus (6) und Lemma 1 folgt

$$|P_2 u_o\ (x,t)| \leq \int_{\mathbb{R}^m} |\Gamma(x,t,\xi,0) u_o(\xi)| d\xi$$

$$\leq \|u_o\|_\infty \int_{\mathbb{R}^m} \frac{c_1}{t^{m/2}} e^{-c_o \frac{(x-\xi)^2}{t}} d\xi \leq c_1 c_2 \|u_o\|_\infty$$

Wegen (12) ist $\frac{\partial}{\partial n} P_2 u_o(x,t) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,0) u_o(\xi) d\xi$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial}{\partial n} P_2 u_o(x,t)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^m} \frac{c_1}{t^{(m+1)/2}} e^{-c_o \xi^2/t} d\xi \, \|u_o\|_\infty$$

$$\leq c_1 c_2 \|u_o\|_\infty \, t^{-1/2} \quad \text{(Lemma 1).}$$

Sei nun u_o δ-hölderstetig. OBdA sei die Fortsetzung auf $\mathbb{R}^m$ 0 außerhalb einer beschränkten Menge $\Omega' \supset \overline{\Omega}$.

Mit (3) ist

$$\frac{\partial}{\partial n} P_2 u_o(x,t) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial \Gamma_o}{\partial n_x}(x,t,\xi,0) u_o(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial}{\partial n_x} \Gamma_1(x,t,\xi,0) u_o(\xi) d\xi$$

Zunächst wird der erste Summand abgeschätzt. Dabei wird verwendet, daß für i=1,..m

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_o(x,t,\xi,\tau) dx = 0 \quad \text{und daher}$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_o(x,t,\xi,0) u_o(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_o(..) u_o(x) d\xi + \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_o(..)(u_o(\xi)-u_o(x)) d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{\partial \Gamma_o}{\partial x_i}(x,t,\xi,0) - \frac{\partial \Gamma_o}{\partial x_i}(2x-\xi,t,x,0)\right) d\xi \, u_o(x) + \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_o(2x-\xi,t,x,0)(u_o(\xi)-u_o(x)) d\xi$$

Mit (4) und (5) und $\langle u_o \rangle_\delta := \sup \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\delta} \mid x,y \in \mathbb{R}^m \right\}$ folgt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial \Gamma_o}{\partial x_i}(x,t,\xi,0) u_o(\xi) d\xi \right| \leq \int_{x-\Omega'} \frac{c_1 |\xi|^\alpha}{t^{(m+1)/2}} e^{-c_o \xi^2/t} d\xi \cdot \|u_o\|_\infty + \int_{\mathbb{R}^m} \frac{c_1}{t^{(m+1)/2}} e^{-c_o \xi^2/t} |\xi|^\delta d\xi \, \langle u_o \rangle_\delta$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^m} \frac{c_1\, d(\Omega')^{\alpha-\delta} |\xi|^\delta}{t^{(m+1)/2}} e^{-c_o\xi^2/t} d\xi \; \|u_o\|_\infty$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^m} \frac{c_1 |\xi|^\delta}{t^{(m+1)/2}} e^{-c_o\xi^2/t} d\xi \; \langle u_o \rangle_\delta$$

($d(\Omega')$ ist der Durchmesser von Ω')

$$\leq \int_{\mathbb{R}^m} \frac{c_1 \max(1, d(\Omega')^{\alpha-\delta}) |\xi|^\delta}{t^{(m+1)/2}} e^{-c_o\xi^2/t} d\xi \; \|u_o\|_\delta$$

$$\leq \frac{c_1 \max(1, d(\Omega')^{\alpha-\delta})}{t^{(m+1-\delta)/2}} \sup_{\sigma>0} (\sigma^\delta e^{-c_o\sigma^2/2}) \; \|u_o\|_\delta \cdot \int_{\mathbb{R}^m} e^{-c_o\xi^2/(2t)} d\xi$$

$$(29) \quad \leq \frac{2^{m/2} c_1 c_2}{t^{(1-\delta)/2}} \max(1, d(\Omega')^{\alpha-\delta}) \sup_{\sigma>0} (\sigma^\delta e^{-c_o\sigma^2/2}) \; \|u_o\|_\delta$$

Um den zweiten Summanden entsprechend behandeln zu können, muß zunächst $D_x\Gamma_1$ abgeschätzt werden:

$$|D_x\Gamma_1(x,t,\xi,\tau)| \leq \int_\tau^t \int_{\mathbb{R}^m} |D_x\Gamma_o(x,t,\eta,\sigma) Q(\eta,\sigma,\xi,\tau)| \, d\eta d\sigma$$

$$\leq \int_\tau^t \int_{\mathbb{R}^m} \frac{c_1^2}{(t-\sigma)^{(m+1)/2}} \frac{1}{(\sigma-\tau)^{(m+2-\alpha)/2}} e^{-c_o\left(\frac{(x-\eta)^2}{t-\sigma} + \frac{(\eta-\xi)^2}{\sigma-\tau}\right)} d\eta d\sigma$$

$$= \int_o^{t-\tau} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{c_1^2}{(t-\tau-\sigma)^{(m+1)/2} \sigma^{(m+2-\alpha)/2}} e^{-c_o\left(\frac{(x-\eta)^2}{t-\tau-\sigma} + \frac{(\eta-\xi)^2}{\sigma}\right)} d\eta d\sigma$$

Das letzte Integral wird zerlegt in die beiden Integrale $\int_o^{(t-\tau)/2}$ und $\int_{(t-\tau)/2}^{t-\tau}$, die einzeln abgeschätzt werden sollen:

$$\int_o^{\frac{t-\tau}{2}} .. d\eta d\sigma \leq \int_o^{\frac{t-\tau}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{c_1^2}{\left(\frac{t-\tau}{2}\right)^{\frac{m+1}{2}} \sigma^{\frac{m+2-\alpha}{2}}} e^{-c_o\left(\frac{(x-\eta)^2}{t-\tau} + \frac{(\eta-\xi)^2}{\sigma}\right)} d\eta d\sigma$$

Eine Abschätzung der Exponenten ergibt sich aus der folgenden Überlegung:

$$|x-\xi| \le |x-\eta|+|\eta-\xi| \Rightarrow (x-\xi)^2 \le (x-\eta)^2 + 2|x-\eta||\eta-\xi| + (\eta-\xi)^2$$

$$\le 2(x-\eta)^2 + 2(\eta-\xi)^2 \Rightarrow$$

$$(30)\quad (x-\eta)^2 \ge \frac{1}{2}(x-\xi)^2 - (\xi-\eta)^2$$

Damit wird der letzte Ausdruck

$$\le \int_0^{\frac{t-\tau}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{2^{(m+1)/2} c_1^2}{(t-\tau)^{(m+1)/2}\,\sigma^{(m+2-\alpha)/2}} e^{-c_0\left(\frac{(x-\eta)^2}{2(t-\tau)} - \frac{(\xi-\eta)^2}{t-\tau} + \frac{(\eta-\xi)^2}{\sigma}\right)} d\eta d\sigma$$

$$\le \int_0^{\frac{t-\tau}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{2^{(m+1)/2} c_1^2}{(t-\tau)^{(m+1)/2}\,\sigma^{(m+2-\alpha)/2}} e^{-\frac{c_0}{2}\left(\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau} + \frac{(\xi-\eta)^2}{\sigma}\right)} d\eta d\sigma$$

$$\le \int_0^{\frac{t-\tau}{2}} \frac{2^{(2m+1)/2} c_1^2 c_2}{(t-\tau)^{(m+1)/2}\,\sigma^{1-\alpha/2}} e^{-\frac{c_0}{2}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} d\sigma$$

$$= \frac{2^{(2m+3-\alpha)/2} c_1^2 c_2}{\alpha (t-\tau)^{(m+1-\alpha)/2}} e^{-\frac{c_0}{2}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}$$

Entsprechend ist

$$\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{t-\tau} \ldots d\eta d\sigma \le \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{t-\tau} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{c_1^2}{(t-\tau-\sigma)^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{t-\tau}{2}\right)^{\frac{m+2-\alpha}{2}}} e^{-c_0\left(\frac{(x-\eta)^2}{t-\tau-\sigma} + \frac{(\eta-\xi)^2}{t-\tau}\right)} d\eta d\sigma$$

$$(30) \le \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{t-\tau} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{2^{(m+2-\alpha)/2} c_1^2}{(t-\tau-\sigma)^{\frac{m+1}{2}} \cdot (t-\tau)^{\frac{m+2-\alpha}{2}}} e^{-c_0\left(\frac{(x-\eta)^2}{t-\tau-\sigma} + \frac{(x-\xi)^2}{2(t-\tau)} - \frac{(x-\eta)^2}{t-\tau}\right)} d\eta d\sigma$$

$$\le \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{t-\tau} \frac{2^{(2m+2-\alpha)/2} c_1^2 c_2}{(t-\tau-\sigma)^{1/2} (t-\tau)^{(m+2-\alpha)/2}} d\sigma\; e^{-\frac{c_0}{2}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}$$

$$= \frac{2^{(2m+3-\alpha)/2} c_1^2 c_2}{(t-\tau)^{(m+1-\alpha)/2}} e^{-\frac{c_0}{2}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}$$

Daraus ergibt sich

$$(31)\quad |D_x\Gamma_1(x,t,\xi,\tau)| \le \frac{\alpha+1}{\alpha}\,\frac{2^{(2m+3-\alpha)/2}\,c_1^2c_2}{(t-\tau)^{(m+1-\alpha)/2}}\,e^{-\frac{c_o}{2}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}$$

und

$$\left|\int_{\mathbb{R}^m} D_x\Gamma_1(x,t,\xi,0)u_o(\xi)d\xi\right| \le \frac{\alpha+1}{\alpha}\,\frac{2^{(3m+3-\alpha)/2}}{t^{(1-\alpha)/2}}\,c_1^2c_2\,\|u_o\|_\infty$$

woraus zusammen mit (29) folgt

$$(32)\quad |D_xP_2u_o(x,t)| \le \text{const}\; t^{-(1-\delta)/2}\,\|u_o\|_\delta$$

und daraus die die Behauptung (22).

c) Der Integrand läßt sich abschätzen durch

$$|\Gamma(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)| \le \frac{c_1\bar{\varphi}\;\tau^{\gamma-1/2}}{(t-\tau)^{m/2}}\,e^{-c_o\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}\quad .$$

Wegen

$$\int_o^t\int_{\partial\Omega}\frac{\tau^{\gamma-1/2}}{(t-\tau)^{m/2}}\,e^{-c_o\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}\,d\xi d\tau \le \int_o^t c_2\,\frac{\tau^{\gamma-1/2}}{(t-\tau)^{1/2}}\,d\tau$$

$$\le c_2\,t^{\gamma}\int_o^1\frac{\tau^{\gamma-1/2}}{(1-\tau)^{1/2}}\,d\tau$$

ist er integrierbar, das Potential $P_3\varphi$ existiert also und genügt der Abschätzung $|P_3\varphi\,(x,t)| \le \text{const}\;\bar{\varphi}\;t^{\gamma}$ Für die übrigen Behauptungen in (23) zerlege man das Integral

$$P_3\varphi\,(x,t) = \int_o^{t_o}\int_{\partial\Omega}\Gamma(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)d\xi d\tau + \int_{t_o}^t \ldots$$

$$=: w_o(x,t) + w_1(x,t) \quad (t>t_o).$$

Da φ beschränkt ist auf $\partial\Omega\times[t_o,T)$, folgt aus (14): w_1 ist stetig auf $\mathbb{R}^m\times[t_o,T)$, hat auf $(\mathbb{R}^m\setminus\partial\Omega)\times(t_o,T)$ partielle Ableitungen (für $(k,l)=(1,0),(2,0),(0,1)$)

$$D_t^lD_x^kw_1(x,t) = \int_{t_o}^t\int_{\partial\Omega} D_t^lD_x^k\Gamma(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

es ist $Lw_1 = 0$, und falls φ stetig ist

$$\frac{\partial w_1}{\partial n}(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x,t) + \int_{t_o}^{t}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

für $x\in\partial\Omega$ und $t>t_o$.

Für w_o zeigt man mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz, daß w_o stetig ist auf $\bar{\Omega}\times[t_o,T)$, daß die partiellen Ableitungen existieren und mit dem Integral vertauschbar sind (daraus folgt auch $Lw_o = 0$) und daß auf dem Rand

$$\frac{\partial w_o}{\partial n}(x,t) = \int_{o}^{t_o}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \quad \text{für } t>t_o,\ x\in\partial\Omega$$

Die letzte Aussage folgt aus der Abschätzung

$$|D_x\Gamma(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)| \le \frac{c_1\,\bar{\varphi}}{(t-\tau)^{(m+1)/2}}\tau^{\gamma-1/2}\, e^{-c_o\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}$$

$$\le \frac{c_1\,\bar{\varphi}}{(t-t_o)^{(m+1)/2}}\,\tau^{\gamma-1/2} \qquad \text{und}$$

$$\int_{o}^{t_o}\int_{\partial\Omega} \frac{\tau^{\gamma-1/2}}{(t-t_o)^{(m+1)/2}}\,d\xi\,d\tau \le |\partial\Omega|\,\frac{2}{2\gamma+1}\,\frac{t_o^{\gamma+1/2}}{(t-t_o)^{(m+1)/2}}$$

Es bleibt daher nur die Stetigkeit des Potentials in den Punkten $(x,0)$ zu untersuchen. Sei $x_o\in\Omega$, $d := d(x_o,\partial\Omega)/2$. Für $|x-x_o| \le d$ ist

$$|P_3\varphi\,(x,t)| \le \int_{o}^{t}\int_{\partial\Omega} \frac{c_1\bar{\varphi}\tau^{\gamma-1/2}}{(t-\tau)^{m/2}}\, e^{-c_o\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}\,d\xi\,d\tau$$

$$\le \int_{o}^{t}\int_{\partial\Omega} \frac{c_1\bar{\varphi}\tau^{\gamma-1/2}}{|x-\xi|^m}\,\sup_{\sigma>0}\,(\sigma^m e^{-c_o\sigma^2})\,d\xi\,d\tau$$

$$\le \frac{c_1\bar{\varphi}|\partial\Omega|}{d^m}\,\sup_{\sigma>0}\,(\sigma^m e^{-c_o\sigma^2})\,\frac{2}{2\gamma+1}\,t^{\gamma+1/2}$$

$$\to 0 \quad \text{für} \quad t\to 0\ .$$

$P_3\varphi$ ist daher in den Punkten $(x,t) \in \Omega\times\{0\}$ stetig. Falls $\gamma>0$ ist, folgt aus der Abschätzung

$|P_3\varphi(x,t)| \le \text{const}\ \bar{\varphi}\ t^{\gamma}$ sogar, daß $P_3\varphi$ stetig ist auf $\mathbb{R}^m\times[0,T)$.

d) Für stetiges μ ist wegen (17) $P_4\mu$ bereits stetig auf $\bar{\Omega}\times(0,T)$, so daß die Stetigkeit nur noch für $t=0$ untersucht werden muß. Sei $x\in\Omega$, $d := d(x,\partial\Omega)/2$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
|P_4\mu\ (x,t)| &\le \int_0^t\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)\right| d\xi d\tau \\
&\le \int_0^t\int_{\partial\Omega} \frac{c_1}{(t-\tau)^{(m+1)/2}}\, e^{-c_0\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}\, d\xi d\tau\ \|\mu\|_\infty \\
&\qquad\qquad \text{nach (6)} \\
&\le \int_0^t\int_{\partial\Omega} \frac{c_1}{|x-\xi|^{m+1}} \sup_{\sigma>0}\left(\sigma^{m+1}\, e^{-c_0\sigma^2}\right) d\xi d\tau\, \|\mu\|_\infty \\
&\le \frac{c_1|\partial\Omega|}{d^{m+1}} \sup_{\sigma>0}\left(\sigma^{m+1}\, e^{-c_0\sigma^2}\right) \|\mu\|_\infty\ t \\
&\to 0 \quad \text{für}\ \ t\to 0 .
\end{aligned}
$$

Daher ist $P_4\mu$ stetig in allen Punkten $(x,0)$, $x\in\Omega$. Um zu zeigen, daß $P_4\mu$ beschränkt ist auf beschränkten Zeitintervallen, d.h. beschränkt auf $\Omega\times[0,\bar{t}]$ mit $\bar{t}<T$, wird das Integral zerlegt:

$$
\begin{aligned}
P_4\mu(x,t) &= \int_{t-t'}^t\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
&\quad + \int_0^{t-t'}\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x,t,\xi,\tau) - \frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x',t,\xi,\tau)\right)\mu(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
&\quad + \int_0^{t-t'}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x',t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
&=: w_1(x,t) + w_2(x,t) + w_3(x,t)
\end{aligned}
$$

Dabei ist $x'\in\partial\Omega$ so gewählt, daß $|x-x'| = d(x,\partial\Omega)$, $t' := \min\,(t, (x-x')^2)$ (also $w_2=w_3=0$ für $(x-x')^2\ge t$).

w_1 , w_2 und w_3 werden getrennt abgeschätzt:

$$|w_1(x,t)| \le \int_{t-t'}^{t}\int_{\partial\Omega} |\frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)|\,d\xi d\tau$$

$$\le \int_{t-t'}^{t}\int_{\partial\Omega} \frac{c_1\,\bar{\mu}\,\tau^\gamma}{(t-\tau)^{(m+1)/2}}\, e^{-c_o\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}\, d\xi d\tau \tag{6}$$

$$\le \int_{t-t'}^{t}\int_{\partial\Omega} \frac{c_1\,\bar{\mu}\,\tau^\gamma}{(t-\tau)^{(m+1)/2}}\, e^{-\frac{c_o}{2}(\frac{(x-x')^2}{t-\tau}+\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau})}\, d\xi d\tau$$

$$\le \int_{t-t'}^{t} \frac{2^{(m-1)/2}c_1c_2\bar{\mu}\tau^\gamma}{t-\tau}\, e^{-\frac{c_o}{2}\frac{(x-x')^2}{t-\tau}}\, d\tau$$

$$\le \int_{t-t'}^{t} \frac{2^{(m-1)/2}c_1c_2\bar{\mu}\,\tau^\gamma}{(t-\tau)^{1/2}|x-x'|}\, \sup_{\sigma>0}\,(\sigma\, e^{-c_o\sigma^2/2})\,d\tau$$

$$\le 2^{(m+1)/2}\, c_1c_2\,\bar{\mu}\,\frac{t'^{1/2}}{|x-x'|}\, t^\gamma \sup_{\sigma>0}(\sigma e^{-c_o\sigma^2/2})$$

$$\le 2^{(m+1)/2}\, c_1c_2 \sup_{\sigma>0}\,(\sigma\, e^{-c_o\sigma^2/2})\,\bar{\mu}\, t^\gamma$$

Sei $(x-x')^2 \le t$. Dann

$$|w_2(x,t)| \le \int_o^{t-t'}\int_{\partial\Omega} |\frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x,t,\xi,\tau) - \frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x',t,\xi,\tau)|\,|\mu(\xi,\tau)|\,d\xi d\tau$$

$$\le \int_o^{t-t'}\int_{\partial\Omega} |x-x'| \sup_{0<\lambda<1} |D_x\frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(\lambda x+(1-\lambda)x',t,\xi,\tau)|\,\bar{\mu}\,\tau^\gamma\, d\xi d\tau$$

$$\le \int_o^{t-t'}\int_{\partial\Omega} \frac{|x-x'|\,c_1}{(t-\tau)^{(m+2)/2}}\, e^{-c_o\frac{\inf(x''-\xi)^2}{t-\tau}}\,\bar{\mu}\,\tau^\gamma\, d\xi d\tau \tag{6a}$$

Das Infimum im Exponenten wird aus den x" bestimmt, die auf der Strecke zwischen x und x' liegen. Für alle $\xi\in\partial\Omega$, x" auf dieser Strecke ist $|x''-\xi| \ge |x''-x'|$, andernfalls wäre nämlich $|x-\xi| \le |x-x''| + |x''-\xi| < |x-x''| + |x''-x'| = |x-x'|$. Da außerdem $|x''-\xi| \ge |x'-\xi| - |x''-x'|$ folgt

$|x''-\xi| \geq |x'-\xi|/2$. w_2 läßt sich daher weiter abschätzen

$$|w_2(x,t)| \leq \int_0^{t-t'} \int_{\partial\Omega} \frac{c_1\bar{\mu}|x-x'|\ \tau^\gamma}{(t-\tau)^{(m+2)/2}} e^{-\frac{c_0}{2}\frac{(x'-\xi)^2}{t-\tau}} d\xi d\tau$$

$$\leq \int_0^{t-t'} \frac{2^{(m-1)/2}\ c_1c_2\ \bar{\mu}|x-x'|\ t^\gamma}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau$$

$$\leq 2^{(m+1)/2}\ c_1c_2\ \frac{|x-x'|}{t'^{1/2}}\ \bar{\mu}\ t^\gamma$$

$$\leq 2^{(m+1)/2}\ c_1c_2\ \bar{\mu}\ t^\gamma ,$$

da $t' = (x-x')^2$ für $(x-x')^2 \leq t$.

$$|w_3(x,t)| \leq \int_0^{t-t'} \int_{\partial\Omega} |\frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x',t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)| d\xi d\tau$$

$$\leq \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{c_1\ \bar{\mu}\ \tau^\gamma}{(t-\tau)^{(m+1-\alpha)/2}} e^{-c_0\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} d\xi d\tau$$

nach (9)

$$\leq \int_0^t \frac{c_1c_2\ \bar{\mu}\ t^\gamma}{(t-\tau)^{1-\alpha/2}} d\tau = \frac{2c_1c_2}{\alpha}\ \bar{\mu}\ t^{\gamma+\alpha/2}$$

Aus den Abschätzungen für w_1, w_2 und w_3 ergibt sich zusammenfassend $|P_4\mu\ (x,t)| \leq$ const $\bar{\mu}\ t^\gamma$ für $x\in\Omega, 0\leq t<T$.

Falls $\mu(x,t) \to 0$ für $t\to 0$, gleichmäßig für $x\in\partial\Omega$, so gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$, so daß für $t<\delta$ $|\mu(x,t)| < \varepsilon$ für alle $x\in\Omega$. Dann ist für $t<\delta$ nach dem eben Bewiesenen auch $|P_4\mu\ (x,t)| \leq$ const ε . $P_4\mu$ konvergiert für $t\to 0$ also gleichmäßig auf Ω gegen 0. Wenn μ stetig ist, folgt zusammen mit (17), daß $P_4\mu$ stetig auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$ ist.

Mit den Potentialen sollen nun Lösungen der inhomogenen Anfangs-Randwertaufgaben (1) und (2) konstruiert werden. Summen der Form

$$u = P_1 f + P_2 u_o + P_3 \varphi \tag{33}$$

$$v = P_1 f + P_2 u_o + P_4 \mu \tag{34}$$

erfüllen unter den entsprechenden Glattheitsvoraussetzungen bereits $Lu = Lv = f$ und für $x \in \Omega$

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = \lim_{t \to 0} v(x,t) = u_o(x) \quad , \text{ aber}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = \frac{\partial}{\partial n} P_1 f\,(x,t) + \frac{\partial}{\partial n} P_2 u_o\,(x,t) + \frac{1}{2}\varphi(x,t) + \int_o^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \quad \text{für } x \in \partial\Omega,\ 0<t<T$$

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in \Omega}} v(x,t) = P_1 f\,(x_o,t) + P_2 u_o(x_o,t) + \frac{1}{2}\mu(x_o,t) + \int_o^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_\xi}(x_o,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \quad \text{für } x_o \in \partial\Omega,\ 0<t<T$$

Sind die Randbedingungen $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ bzw. $v_{|\partial\Omega} = h$ vorgegeben, so sind φ und μ so zu bestimmen, daß

$$\frac{1}{2}\varphi(x,t) = g_1(x,t) - \int_o^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \tag{35}$$

$$\frac{1}{2}\mu(x,t) = h_1(x,t) - \int_o^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_\xi}(x,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \tag{36}$$

mit

$$\begin{aligned} g_1 &= g - \frac{\partial}{\partial n} P_1 f - \frac{\partial}{\partial n} P_2 u_o \\ h_1 &= h - P_1 f_{|\partial\Omega} - P_2 u_{o|\partial\Omega} \end{aligned} \tag{37}$$

1.2 Definition

Die Potentialsummen u und v aus (33) und (34), wobei φ und μ Lösungen der Integralgleichungen (35) und (36) sind, heißen Quasilösungen der Anfangs-Randwertaufgaben (1) bzw. (2).

Es soll jetzt untersucht werden, unter welchen Bedingungen Quasilösungen existieren und wann sie Lösungen sind. Zunächst müssen dazu die Integralgleichungen (35) und (36) gelöst werden oder, äquivalent dazu, nach Quasilösungen von

(38) $Lu = 0 \quad u(x,0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = g_1(x,t),\ x \in \partial\Omega$

(39) $Lv = 0 \quad v(x,0) = 0 \quad v(x,t) = h_1(x,t),\ x \in \partial\Omega$

gesucht werden.
Vorweg einige Lemmata:

1.3 Lemma (Gronwall)
Sei $T \in (0,\infty]$ und $u: (0,T) \to \mathbb{R}_+$ eine auf beschränkten Intervallen Lebesgue-integrierbare Funktion mit

(40) $u(t) \leq at^{-\alpha} + b \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} u(\tau)d\tau \quad \forall t \in (0,T).$

(Dabei seien $a,b>0$, $\alpha<1$ und $0 \leq \beta < 1$.)
Dann gilt für alle $t \in (0,T)$ $u(t) \leq aA\, e^{Mt}\, t^{-\alpha}$, wobei die Konstanten A und M nur von b, α und β abhängen.

Der Beweis wird in mehrere Schritte zerlegt.
An einigen Stellen wird die Beziehung

$$\int_0^1 \sigma^{-\alpha}(1-\sigma)^{-\beta}\, d\sigma = B(1-\alpha,1-\beta) = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)} \quad \text{benutzt.}$$

Unter den Voraussetzungen von Lemma 3 gilt:

(41) Es gibt $\tilde{a},\tilde{b} > 0$, wobei $\tilde{a}$ nur von α,β und b, $\tilde{b}$ nur von β und b abhängt, so daß

$$u(t) \leq \left(a\tilde{a}t^{-\alpha} + \tilde{b} \int_0^t e^{-\tau} u(\tau)d\tau \right) e^t$$

Beweis von (41): Wendet man (40) zweimal an, so ergibt sich

$$u(t) \leq at^{-\alpha} + ab \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} \tau^{-\alpha}\, d\tau$$
$$+ b^2 \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} \int_0^\tau (\tau-\sigma)^{-\beta} u(\sigma)\, d\sigma d\tau$$
$$\leq at^{-\alpha} + abB(1-\alpha,1-\beta)\, t^{1-\alpha-\beta}$$
$$+ b^2 \int_0^t \int_\sigma^t (t-\tau)^{-\beta} (\tau-\sigma)^{-\beta} u(\sigma)\, d\tau d\sigma$$
$$\leq aa_1(b,\alpha,\beta)(1 + t^{1-\beta})t^{-\alpha}$$
$$+ b^2 B(1-\beta,1-\beta) \int_0^t (t-\tau)^{1-2\beta} u(\tau)\, d\tau$$
$$\leq aa_1(b,\alpha,\beta)(1+t^{1-\beta})t^{-\alpha} + b_1(\beta,b)\int_0^t (t-\tau)^{1-2\beta} u(\tau)\, d\tau$$

Setzt man hier wieder die Integralungleichung (40) ein, so kann man das Verfahren fortsetzen und gelangt durch Induktion zu

$$u(t) \leq aa_n(b,\alpha,\beta)\Big(\sum_{k=0}^{n} t^{k(1-\beta)}\Big)\, t^{-\alpha}$$
$$+ b_n(b,\beta) \int_0^t (t-\tau)^{n-(n+1)\beta} u(\tau)\, d\tau$$

Wählt man nun n so, daß

$\frac{n+1}{n}\beta \leq 1 < \frac{n}{n-1}\beta$, so folgt wegen $t^{k(1-\beta)} \leq 1+t$ für $0 \leq k \leq n$

$$u(t) \leq a\, \tilde{a}(b,\alpha,\beta)(1+t)t^{-\alpha} + \tilde{b}(b,\beta)\int_0^t (1+t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

mit $\tilde{a} = (n+1)a_n$ und $\tilde{b} = b_n$, und hieraus folgt (41).

Eine Lösung der zur Integralungleichung (41) gehörenden Integralgleichung

$$(42) \qquad v(t)e^{-t} = a\tilde{a}t^{-\alpha} + \tilde{b} \int_0^t e^{-\tau} v(\tau)\, d\tau$$

läßt sich iterativ leicht berechnen. Die Reihe

$$v(t) = a\tilde{a}e^{t} \sum_{n=0}^{\infty} \Big((\tilde{b}t)^n \Big(\prod_{k=1}^{n} (k-\alpha)\Big)^{-1}\Big) \cdot t^{-\alpha}$$

ist konvergent und eine Lösung von (42), wie man durch Einsetzen sieht. Diese Lösung läßt sich abschätzen durch

$$v(t) \leq a\,\ddot{a}\,e^{t}\,(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ddot{b}t)^{n}}{(1-\alpha)(n-1)!}) \cdot t^{-\alpha}$$

$$\leq a\,\ddot{a}\,e^{t}\,(1 + \frac{\ddot{b}t}{1-\alpha}\,e^{\ddot{b}t}) \cdot t^{-\alpha} \leq a\ddot{a}\,e^{t}\,e^{\ddot{b}t}\,e^{\ddot{b}t/(1-\alpha)} \cdot t^{-\alpha}$$

$$\leq a\,A(b,\alpha,\beta)\,e^{M(b,\alpha,\beta)t}\,t^{-\alpha} \tag{43}$$

Diese Funktion soll später mit Abbildungen verglichen werden, die die Integralungleichung erfüllen. Dazu braucht man:

(44) w erfülle die Voraussetzungen von Lemma 3 mit a=0. Dann ist $w \equiv 0$.

Beweis von (44): Wegen (41) ist für $\tilde{w}$ mit $\tilde{w}(t)=w(t)e^{-t}$ $\tilde{w}(t) \leq \ddot{b} \int_0^t \tilde{w}(\tau)d\tau$. Da nach Voraussetzung w und damit auch $\tilde{w}$ integrierbar ist, ist $\lim_{t\to 0} \tilde{w}(t) \leq \ddot{b} \lim_{t\to 0} \int_0^t \tilde{w}(\tau)d\tau = 0$. Falls $\tilde{w} \not\equiv 0$, so sei oBdA $0 = \inf \{ t>0 \mid \tilde{w}(t) > 0 \}$. Zu $t_0 \in (0,1/\ddot{b})$, $\varepsilon>0$ wähle man ein $s \in (0,t_0]$ so, daß

$\tilde{w}(s) \geq \sup \{ \tilde{w}(\tau) \mid 0<\tau\leq t_0 \} - \varepsilon$; dann ist

$$\sup \{\tilde{w}(\tau) \mid 0<\tau\leq t_0\} - \varepsilon \leq \tilde{w}(s) \leq \ddot{b} \int_0^{t_0} \tilde{w}(\tau)d\tau$$

$$\leq \ddot{b}\, t_0 \sup \{\tilde{w}(\tau) \mid 0<\tau\leq t_0\}$$

$$\Rightarrow \sup \{\tilde{w}(\tau) \mid 0<\tau\leq t_0\} \leq \varepsilon/(1-\ddot{b}t_0) \quad \text{für alle } \varepsilon>0,$$

und dies ist ein Widerspruch zu $\tilde{w} \not\equiv 0$.

Beweis von Lemma 3: u erfülle die Voraussetzungen von Lemma 3. Wegen (41) ist

$$u(t) \leq (\, a\ddot{a}t^{-\alpha} + \ddot{b} \int_0^t e^{-\tau}u(\tau)d\tau\,)e^{t} \quad .$$

v erfülle die Integralgleichung (42). Für w:=u-v gilt dann die Ungleichung

$w(t)e^{-t} \leq \ddot{b} \int_0^t e^{-\tau}w(\tau)d\tau$, und dieselbe Ungleichung erfüllt dann auch w^+ mit $w^+(t) := \max(0,w(t))$. Da

$w^+ \geq 0$ folgt aus (44): $w^+(t)\, e^{-t} = 0$ für alle $t \geq 0$ $\Rightarrow w \leq 0 \Rightarrow u(t) \leq v(t) \leq aA(b,\alpha,\beta)\, e^{M(b,\alpha,\beta)t}\, t^{-\alpha}$ nach (43). |

1.4 Lemma

Sei E ein Banachraum, $t_1 \in (0,\infty]$, $\alpha<1$, $0 \leq \beta < 1$ und

$a : (0,t_1) \to E$, $b : E \times \{(t,\tau) \in (0,t_1)^2 \mid \tau<t\} \to E$

meßbare Funktionen mit $\|a(t)\| \leq \bar{a}\, t^{-\alpha}$,

$b(0,t,\tau) = 0$, $\|b(u,t,\tau)-b(v,t,\tau)\| \leq \bar{b}\|u-v\|(t-\tau)^{-\beta}$.

Dann gibt es genau eine auf beschränkten Mengen integrierbare Funktion $u : (0,t_1) \to E$ mit

$$(45) \qquad u(t) = a(t) + \int_0^t b(u(\tau),t,\tau)d\tau \quad ;$$

und diese Lösung der Integralgleichung (45) läßt sich abschätzen durch

$\|u(t)\| \leq \bar{a}\, A\, e^{Mt}\, t^{-\alpha}$, wobei A und M nur von $\bar{b}$, α und β abhängen. Falls b stetig in t ist für $t>\tau$, so ist $u-a$ stetig auf $(0,t_1)$; falls $\alpha+\beta < 1$, ist $\lim_{t\to 0} (u(t)-a(t)) = 0$.

Beweis: Sei $\mu > (\bar{b}(\frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{e}))^{1/(1-\beta)}$ und F_μ der Banachraum der meßbaren Funktionen $u : (0,t_1) \to E$ mit $\|u\|_F := \int_0^{t_1} e^{-\mu t}\, \|u(t)\|_E dt < \infty$. Dann ist $a \in F_\mu$. Für $u \in F_\mu$ ist die Abbildung $t \to \int_0^t b(u(\tau),t,\tau)d\tau$ ebenfalls in F_μ , da

$$\int_0^{t_1} e^{-\mu t}\, \|\int_0^t b(u(\tau),t,\tau)d\tau\|_E\, dt$$

$$\leq \int_0^{t_1} e^{-\mu t}\, \bar{b} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\|u(\tau)\|_E\, d\tau dt$$

$$\leq \bar{b} \int_o^{t_1} e^{-\mu\tau} \|u(\tau)\|_E \int_\tau^{t_1} e^{-\mu(t-\tau)} (t-\tau)^{-\beta} \, dt \, d\tau$$

$$\leq \bar{b} \int_o^{t_1} e^{-\mu\tau} \, \tau^{-\beta} \, d\tau \, \|u\|_F$$

Durch $u \to Tu$

$$Tu(t) := a(t) + \int_o^t b(u(\tau),t,\tau)d\tau$$

wird daher eine Abbildung von F_μ in sich definiert.
T ist eine Kontraktion, denn für $u,v \in F_\mu$ ist

$$\|Tu - Tv\|_F = \int_o^{t_1} e^{-\mu t} \, \|Tu(t) - Tv(t)\|_E \, dt$$

$$\leq \bar{b} \, \|u-v\|_F \int_o^{t_1} e^{-\mu t} \, t^{-\beta} \, dt$$

$$\leq \bar{b} \, \|u-v\|_F \left(\int_o^{1/\mu} e^{-\mu t} \, t^{-\beta} dt + \int_{1/\mu}^{\infty} e^{-\mu t} t^{-\beta} dt \right)$$

$$\leq \bar{b} \, \|u-v\|_F \left(\frac{1}{1-\beta} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{1-\beta} + \left(\frac{1}{\mu}\right)^{-\beta} \frac{1}{\mu} e^{-1} \right)$$

$$= \bar{b} \, \|u-v\|_F \left(\frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{e} \right) \mu^{-(1-\beta)} = \theta \, \|u-v\|_F$$

mit $\theta := \bar{b} \left(\frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{e} \right) \mu^{-(1-\beta)} < 1$

Daher existiert genau eine Lösung der Integralgleichung (45) in F_μ. Für jede auf beschränkten Mengen integrierbare Lösung ist

$\|u(t)\| \leq \bar{a} \, t^{-\alpha} + \bar{b} \int_o^t (t-\tau)^{-\beta} \, u(\tau) \, d\tau$ und daher nach Lemma 3

$\|u(t)\| \leq \bar{a} \, A(\bar{b},\alpha,\beta) \, e^{M(\bar{b},\alpha,\beta)t} \, t^{-\alpha}$

$\Rightarrow u \in F_\mu$ für hinreichend großes μ. Daher gibt es genau eine auf beschränkten Intervallen integrierbare Lösung.

Falls $\alpha+\beta < 1$, so ist

$$\|u(t) - a(t)\| = \left\| \int_o^t b(u(\tau),t,\tau)d\tau \right\|$$

$$\leq \bar{b} \int_o^t (t-\tau)^{-\beta} \, \bar{a}A \, e^{M\tau} \, \tau^{-\alpha} d\tau$$

$$\leq \bar{a}\bar{b}A \, e^{Mt} \, B(1-\alpha,1-\beta) \, t^{1-\alpha-\beta} \to 0 \quad \text{für } t \to 0.$$

Sei schließlich b stetig für $t>\tau$. Dann ist für $t_o>0$,

$0 < \varepsilon < t_o/2$ und $t \in (t_o-\varepsilon/2, t_o+\varepsilon/2) \Rightarrow$

$$\int_o^t b(u(\tau),t,\tau)d\tau = \int_o^{t_o-\varepsilon} b(u(\tau),t,\tau)d\tau + \int_{t_o-\varepsilon}^t ..d\tau$$

$$=: w_1(t) + w_2(t)$$

$$\|w_2(t)\| \le \bar{b} \int_{t_o-\varepsilon}^t (t-\tau)^{-\beta} \bar{a} Ae^{M\tau} \tau^{-\alpha} d\tau$$

$$\le \bar{a}\bar{b}A\, e^{2Mt_o} \max\left(\left(\frac{t_o}{2}\right)^{-\alpha}, \left(\frac{3t_o}{2}\right)^{-\alpha} \right) 2\frac{\varepsilon^{1-\beta}}{1-\beta}$$

$$\le \text{const } \varepsilon^{1-\beta} \to 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0.$$

Der Integrand von w_1 wird abgeschätzt durch

$$\|b(u(\tau),t,\tau)\| \le \bar{b}\, (t-\tau)^{-\beta} \|u(\tau)\|$$

$$\le \bar{a}\bar{b}A\, e^{2Mt_o} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-\beta} \tau^{-\alpha}$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt hieraus

$$\lim_{t\to t_o} \| w_1(t) - \int_{t_o-\varepsilon}^{t_o} b(u(\tau),t_o,\tau)d\tau \| = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\| \int_o^t b(u(\tau),t,\tau)d\tau - \int_o^{t_o} b(u(\tau),t_o,\tau)d\tau \|$$

$$\le \|w_1(t)-w_1(t_o)\| + \|w_2(t)\| + \|w_2(t_o)\|$$

$$\le \|w_1(t)-w_1(t_o)\| + \text{const } \varepsilon^{1-\beta}$$

$$\to \text{const } \varepsilon^{1-\beta} \quad \text{für } t\to t_o, \text{ für alle } \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to t_o} \int_o^t b(u(\tau),t,\tau)d\tau = \int_o^{t_o} b(u(\tau),t_o,\tau)d\tau \qquad \square$$

Wir kommen wieder auf die Integralgleichungen (35) und (36) zurück. Wenn

(46) $\quad |g_1(x,t)| \le \bar{g}_1 t^\gamma$ bzw. $|h_1(x,t)| \le \bar{h}_1 t^\gamma$ mit $\gamma > -1$

und ist E der Banachraum $L^\infty(\partial\Omega)$, so sind die Voraussetzungen von Lemma 4 erfüllt, denn es ist

$$\left|\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)d\xi\right|$$

$$\leq \|\varphi\|_\infty \int_{\partial\Omega} \frac{c_1}{(t-\tau)^{(m+1-\alpha)/2}} e^{-c_o\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} d\xi$$

$$\leq c_1 c_2 \|\varphi\|_\infty \ (t-\tau)^{-(1-\alpha/2)} \qquad \text{für} \quad x\in\partial\Omega$$

und entsprechend

$$\left|\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)d\xi\right| \leq c_1 c_2 \|\mu\|_\infty \ (t-\tau)^{-(1-\alpha/2)}$$

Nach Lemma 4 existiert jeweils genau eine auf beschränkten Zeitintervallen integrierbare Lösung φ bzw. μ zu den Integralgleichungen (35) und (36). Ferner erfüllen φ und μ dieselben Abschätzungen wie g_1 und h_1

(47) $\quad |\varphi(x,t)| \leq \text{const}\ \bar{g}_1\ t^\gamma\,,\ |\mu(x,t)| \leq \text{const}\ \bar{h}_1\ t^\gamma$

für $(x,t) \in \partial\Omega\times(0,T)$. Die Konstanten hängen nur von L,Ω und $T<\infty$ ab.

Falls g_1 und h_1 stetig sind, so wählt man statt $L^\infty(\partial\Omega)$ $E = C(\partial\Omega)$. Um Lemma 4 anwenden zu können, muß man zeigen, daß für $x\in\partial\Omega$, $t>\tau$ die Abbildung

(48)
$$\psi : (x,t) \to \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)d\xi \quad \text{bzw.}$$
$$\psi : (x,t) \to \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x,t,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)d\xi$$

stetig ist.

Dies sei stellvertretend für den ersten Fall gezeigt:

Für $m=1$ ist die Behauptung trivial. Sei also $m>1$, $\varepsilon>0$

$t_o-\tau > 0$, $x,x_o\in\partial\Omega$, $|x-x_o|<\varepsilon$, $t \in ((t_o+\tau)/2,(3t_o-\tau)/2)$.

Definiere (in Abhängigkeit von ε):

$$\psi_1(x,t) = \int_{\partial\Omega\cap\{|x_o-\xi|\leq 2\varepsilon\}} \frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)d\xi \quad \text{und}$$

$$\psi_2(x,t) = \int_{\partial\Omega\cap\{|x_o-\xi|>2\varepsilon\}} \frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)d\xi$$

Dann ist

$$|\psi_1(x,t)| \leq \int_{\partial\Omega \{|x_o-\xi|\leq 2\varepsilon\}} \frac{c_1\|\varphi\|_\infty}{(t-\tau)^{(m+1-\alpha)/2}}\, d\xi$$

$$\leq c_1\|\varphi\|_\infty \frac{\text{const}}{(t_o-\tau)^{(m+1-\alpha)/2}}\, \varepsilon^{m-1} \to 0 \text{ für } \varepsilon\to 0$$

(die Konstante hängt nur von Ω ab),

und für den Integranden von ψ_2 ist

$$\left|\frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)\right| \leq \frac{c_1\|\varphi\|_\infty}{(t-\tau)^{(m+1-\alpha)/2}}\, e^{-c_o\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}$$

$$\leq \frac{c_1\|\varphi\|_\infty}{((t_o-\tau)/2)^{(m+1-\alpha)/2}}\, e^{-c_o\frac{2\varepsilon^2}{3(t_o-\tau)}}$$

Diese Abschätzung ist unabhängig von x und t.
Da das Integral endlich ist, folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{(x,t)\to(x_o,t_o)} \psi_2(x,t) = \psi_2(x_o,t_o) \quad \text{, und daher}$$

$$\left|\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau) - \frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(x_o,t_o,\xi,\tau)\right)\varphi(\xi,\tau)d\xi\right|$$

$$\leq |\psi_1(x,t)| + |\psi_1(x_o,t_o)| + |\psi_2(x,t)-\psi_2(x_o,t_o)|$$

$$\leq \text{const}\ \varepsilon^{m-1} + |\psi_2(x,t)-\psi_2(x_o,t_o)|$$

$$\to \text{const}\ \varepsilon^{m-1} \quad \text{für } (x,t)\to(x_o,t_o)$$

Da dies für alle $\varepsilon>0$ gilt, folgt

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)d\xi \to \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(x_o,t_o,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)d\xi$$

$$\text{für } (x,t)\to(x_o,t_o)\ .$$

Damit ist (48) gezeigt. Für $t>\tau$ ist daher $\psi(.,t)$ in E, und die Integralgleichung (35) bzw. (36) ist nach Lemma 4 lösbar in E.
Da $\partial\Omega$ kompakt ist, ist auch die Abbildung

$(O,T) \to E$

$t \to \psi(.,t)$ stetig; aus Lemma 4 folgt, daß dann für

die Lösung der Integralgleichung (35) bzw. (36) gilt:
Die Abbildung $(0,T) \to E$
$t \to \varphi(.,t) - g_1(.,t)$ bzw. $t \to \mu(.,t) - h_1(.,t)$
ist stetig; hieraus schließt man, daß $\varphi - g_1$ bzw. $\mu - h_1$ stetig auf $\partial\Omega \times (0,T)$ ist.

(49) Falls g_1 und h_1 stetig auf $\partial\Omega \times (0,T)$ sind, sind auch die Lösungen der Integralgleichungen (35) und (36) stetig auf $\partial\Omega \times (0,T)$.

Nach diesen Vorbereitungen kann man nun beweisen:

1.5 Satz

Es sei $T<\infty$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$, und g bzw. h $\in L^\infty(\partial\Omega \times (0,T))$. Dann gibt es genau eine Quasilösung u bzw. v von (1) bzw. (2). Für diese gilt:

(50) $$|u(x,t)| \leq \text{const } (\|u_0\| + \|g\| t^{1/2} + \|f\| t)$$
$$|v(x,t)| \leq \text{const } (\|u_0\| + \|h\| + \|f\| t)$$

wobei die Konstanten nur von L (genauer: c_0 und c_1), Ω und T abhängen.

(51) u und $D_x u$ bzw. v und $D_x v$ sind hölderstetig auf $\Omega \times (0,T)$. u ist stetig auf $\overline{\Omega} \times (0,T)$.

Sei u_0 stetig auf Ω und $u(x,0) := v(x,0) := u_0(x)$. Dann:

(52) u ist stetig auf $\overline{\Omega} \times [0,T) \setminus \partial\Omega \times \{0\}$
v ist stetig auf $\Omega \times [0,T)$.

Ist g stetig auf $\partial\Omega \times (0,T)$, so ist

(53) $$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = g(x,t) \qquad \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T).$$

Ist h stetig auf $\partial\Omega \times (0,T)$, so ist mit $v(x,t) := h(x,t)$ für $x \in \partial\Omega$ und $t > 0$

(54) v stetig auf $\overline{\Omega} \times (0,T)$.

(55) f hölderstetig in $\Omega \times (0,T) \Rightarrow Lu = Lv = f$ in $\Omega \times (0,T)$.

Sei g stetig auf $\partial\Omega\times(0,T)$ und u_o hölderstetig auf $\bar{\Omega}$.
Dann gilt:

(56) u ist stetig auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$.

Sei h stetig auf $\partial\Omega\times[0,T)$, u_o stetig auf $\bar{\Omega}$.

(57) $h(x,0) = u_o(x)\ \forall x\in\partial\Omega \Rightarrow$ v stetig auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$.

Beweis: Nach (37) haben g_1 und h_1 die Form

(37)
$$g_1 = g - \frac{\partial}{\partial n}P_1 f - \frac{\partial}{\partial n}P_2 u_o$$
$$h_1 = h - P_1 f_{|\partial\Omega} - P_2 u_{o|\partial\Omega}$$

wobei $P_1 f$ und $P_2 u_o$ die jeweiligen Potentiale der Raumladung f und der Anfangsbedingung u_o sind.
Wenn $f\in L^\infty(\Omega\times(0,T))$, $u_o\in L^\infty(\Omega)$ und $g,h\in L^\infty(\partial\Omega\times(0,T))$, so folgt aus (18)-(22)

(58)
$$|g_1(x,t)| \le \text{const}\ (t^{-1/2}\|u_o\| + \|g\| + t^{1/2}\|f\|)$$
$$|h_1(x,t)| \le \text{const}\ (\|u_o\| + \|h\| + t\|f\|)$$

Daraus ergibt sich mit (47) für die eindeutigen Lösungen φ und μ der Integralgleichungen (35) und (36):

(59)
$$|\varphi(x,t)| \le \text{const}\ (t^{-1/2}\ u_o\| + \|g\| + t^{1/2}\|f\|)$$
$$|\mu(x,t)| \le \text{const}\ (\|u_o\| + \|h\| + t\|f\|)$$

Für die Quasilösungen $u = P_1 f + P_2 u_o + P_3\varphi$,
$v = P_1 f + P_2 u_o + P_4\mu$ folgt aus den Abschätzungen (59) zusammen mit (18),(20),(23) und (25):

(50)
$$|u(x,t)| \le \text{const}\ (\|u_o\| + \|g\|t^{1/2} + \|f\|t)$$
$$|v(x,t)| \le \text{const}\ (\|u_o\| + \|h\| + \|f\|t)$$

wobei die Konstanten nur von c_o, c_1, Ω und T abhängen.

Für die Behauptungen (51)-(57) werden die Ergebnisse für die einzelnen Potentiale herangezogen:
u und v sind zusammen mit ihren ersten Ortsablei-

tungen hölderstetig in $\Omega\times(0,T)$ (10,12,23,16). Falls f in $\Omega\times(0,T)$ hölderstetig ist, ist Lu=Lv=f (11,12,23,16). Ist u_o stetig auf Ω, so sind mit $u(x,0):=v(x,0):=u_o(x)$ u und v stetig auf $\Omega\times[0,T)$ (10,13,23,25). Ist g stetig auf $\partial\Omega\times(0,T)$, so ist φ stetig auf $\partial\Omega\times(0,T)$ (10,12,49) und für $(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)$

$$\frac{\partial}{\partial n}u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x,t) + \int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}(x,t,\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)d\xi d\tau + \frac{\partial}{\partial n}P_1f\,(x,t) + \frac{\partial}{\partial n}P_2u_o\,(x,t) \quad \text{nach (23)}$$

$$= g_1(x,t) + \frac{\partial}{\partial n}P_1f\,(x,t) + \frac{\partial}{\partial n}P_2u_o\,(x,t) \quad (35)$$

$$= g(x,t) \quad \text{wegen (37)}.$$

Ist h stetig auf $\partial\Omega\times(0,T)$, so ist μ stetig (10,12,49) und für $(x_o,t_o)\in\partial\Omega\times(0,T)$ wegen (17)

$$\lim_{(x,t)\to(x_o,t_o)} v(x,t) = P_1f\,(x_o,t_o) + P_2u_o\,(x_o,t_o) + \frac{1}{2}\mu(x_o,t_o) + \int_0^{t_o}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Gamma}{\partial n_\xi}(x_o,t_o,\xi,\tau)\mu(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$= P_1f\,(x_o,t_o) + P_2u_o\,(x_o,t_o) + h_1(x_o,t_o) \quad \text{nach (36)}$$

$$= h(x_o,t_o) \quad \text{nach (37)}.$$

Ist u_o zusätzlich hölderstetig auf $\overline{\Omega}$, so ist wegen (21)

$$\left|\frac{\partial}{\partial n}P_2u_o\,(x,t)\right| \le \text{const}\ t^{-\frac{1-\delta}{2}}\|u_o\|_\delta\ ,$$

und statt (58) erhält man die bessere Abschätzung

$$|g_1(x,t)| \le \text{const}\ (\ t^{-(1-\delta)/2}\|u_o\|_\delta + \|g\| + t^{1/2}\|f\|)$$

und entsprechend statt (59)

$$|\varphi(x,t)| \le \text{const}\ (\ t^{-(1-\delta)/2}\|u_o\|_\delta + \|g\| + t^{1/2}\|f\|)\ .$$

Aus (24) folgt, daß in diesem Fall $P_3\varphi$ stetig ist auf

$\bar{\Omega}\times[0,T)$; für $P_1 f$ und $P_2 u_o$ gilt dies wegen (10) und (13) ohnehin.

Sind beim ersten Randwertproblem (2) die Randwerte auf dem gesamten parabolischen Rand stetig, also insbesondere $u_o(x) = h(x,0)$ für $x\in\partial\Omega$, so ist h_1 aus (37) stetig auf $\partial\Omega\times[0,T)$, da h , $P_1 f$ und $P_2 u_o$ dort stetig sind (10,13). Daß dann auch μ stetig auf $\partial\Omega\times(0,T)$ ist, war schon gezeigt worden. Da nun aber $\lim_{t\to 0} P_2 u_o(x,t) = u_o(x) = h(x,0)$ für $x\in\partial\Omega$,

ist $h_1(x,0) = h(x,0) - P_2 u_o(x,0) = 0$ für $x\in\partial\Omega$.

Für die Lösung μ der Integralgleichung (36) folgt aus Lemma 4 $\lim_{t\to 0} \| \mu(.,t) - h_1(.,t) \|_{L^\infty(\partial\Omega)} = 0$.

Daher ist μ stetig auf $\partial\Omega\times[0,T)$ und $\lim_{t\to 0} \mu(x,t) = 0$.

Nach (26) ist dann $P_4\mu$ stetig auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$. Damit ist auch v stetig auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$. ⌟

Die Quasilösungen u und v aus (33) und (34) brauchen im allgemeinen keine(klassischen) Lösungen zu sein. Außerdem kann es noch andere Lösungen geben. Es gilt aber:

(60) Falls u_o stetig auf Ω ist, f hölderstetig auf $\Omega\times(0,T)$ und g bzw. h stetig auf $\partial\Omega\times(0,T)$ ist, so sind die Quasilösungen u bzw. v Lösungen von (1) bzw. (2).

Dies folgt unmittelbar aus (52)-(55).

(61) Es gibt höchstens eine auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$ stetige Lösung von (1) bzw. (2).

Dies zeigt man mit dem Maximumprinzip, das hier in einer passenden Form zitiert werden soll:

1.6 Lemma (Maximumprinzip)

Sei w stetig auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$ und $Lw \leqq 0$ auf $\Omega\times(0,T)$. Dann gibt es ein $\gamma\in R$, so daß für $(x,t) \in \bar{\Omega}\times[0,T)$ gilt

$$w(x,t) \leqq \max\,(0,\ \sup\,\{w(\xi,\tau)e^{\gamma(t-\tau)} \mid (\xi,\tau) \in \bar{\Omega}\times\{0\}\cup \partial\Omega\times[0,t)\})$$

Wenn w nicht konstant ist, so

a) gilt echte Ungleichheit für alle $(x,t) \in \Omega\times(0,T)$

b) Falls für ein $(x,t) \in \partial\Omega\times(0,T)$

$$w(x,t) = \sup\,\{w(\xi,\tau)e^{\gamma(t-\tau)} \mid (\xi,\tau) \in \bar{\Omega}\times[0,t]\} \geqq 0$$

und $\frac{\partial w}{\partial n}(x,t)$ existiert, so ist $\frac{\partial w}{\partial n}(x,t) > 0$.

Für den Fall $c \leqq 0$ (c ist der Koeffizient von u im parabolischen Differentialoperator L) und $\gamma=0$ ist diese Aussage in [18] , 2.1, Theorem 1 und 2.5, Theorem 14 gezeigt. Den allgemeinen Fall erhält man durch Betrachtung von $\tilde{w}$ mit

$$\tilde{w}(x,t) := w(x,t)e^{-\gamma t} \quad , \ \gamma \geqq \sup\,\{c(x,t) \mid (x,t)\in\bar{\Omega}\times[0,T)\}$$

Aus b) folgt unmittelbar

$$\text{(62)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial n} \leqq 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega\times(0,T), \quad w \not\equiv \text{const} \quad \Rightarrow \\ &w(x,t) < \max\,(0,\ \sup\,\{w(\xi,0)e^{\gamma t} \mid \xi\in\bar{\Omega}\}) \\ &\qquad\qquad \text{für alle } (x,t) \in \bar{\Omega}\times(0,T). \end{aligned}$$

1.7 Korollar

Seien u bzw. v stetige Lösungen von (1) bzw. (2) . Dann ist

$$\text{(63)} \qquad \begin{aligned} &|u(x,t)| \leqq \text{const}\ (\|u_o\| + \|g\|\,t^{1/2} + \|f\|\,t) \quad \text{bzw.} \\ &|v(x,t)| \leqq \text{const}\ (\max(\|u_o\|,\|h\|) + \|f\|\,t) \quad , \end{aligned}$$

wobei die Konstanten von L (c_o und c_1), Ω und T abhängen.

Beweis: Seien $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ die Quasilösungen zu

$$L\tilde{u} = \|f\| \qquad \tilde{u}_{|t=0} = \|u_o\| \qquad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = \|g\| \text{ auf } \partial\Omega \qquad \text{bzw.}$$

$$L\tilde{v} = \|f\| \qquad \tilde{v}_{|t=0} = \tilde{v}_{|\partial\Omega} = \max(\|u_o\|, \|h\|)$$

u und v sind klassische Lösungen, die außerdem stetig auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$ sind, da für die konstanten Funktionen $\|f\|, \|u_o\|, \|g\|, \max(\|u_o\|, \|h\|)$ alle dazu notwendigen Glattheitsvoraussetzungen erfüllt sind, und da für das erste Randwertproblem die Randwerte auch stetig in den Punkten von $\partial\Omega\times\{0\}$ sind (60,53, 54). Aus (50) folgt

$$|\tilde{u}(x,t)| = \text{const } (\|u_o\| + \|g\| t^{1/2} + \|f\| t)$$
$$|\tilde{v}(x,t)| = \text{const } (\max(\|u_o\|, \|h\|) + \|f\| t) .$$

Wendet man das Maximumprinzip nun auf die stetigen Funktionen u-ũ, v-ṽ, -(u+ũ) und -(v+ṽ) an, so folgt $-\tilde{u} \leq u \leq \tilde{u}$ und $-\tilde{v} \leq v \leq \tilde{v}$ und daraus die Behauptung (63). □

Seien nun u_1 und u_2 bzw. v_1 und v_2 jeweils zwei auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$ stetige Lösungen von (1) bzw. (2). Dann ist $L(u_1-u_2) = 0$, $\frac{\partial}{\partial n}(u_1-u_2) = 0$ auf $\partial\Omega$ und $(u_1-u_2)_{|t=0} = 0$ bzw. $L(v_1-v_2) = 0$, $(v_1-v_2)_{|\partial\Omega} = 0$ und $(v_1-v_2)_{|t=0} = 0$. Aus (63) folgt $u_1=u_2$ bzw. $v_1=v_2$, und damit ist (61) bewiesen.

Zusammenfassend erhält man aus Satz 5, (60) und (61)

1.8 Satz

Sei f beschränkt und hölderstetig auf $\Omega\times(0,T)$, $u_o \in C(\bar{\Omega})$ im Fall (2) und $u_o \in C^{\delta}(\bar{\Omega})$ ($\delta\in(0,1)$ im Fall (1), g beschränkt und stetig auf $\partial\Omega\times(0,T)$, $h \in C(\partial\Omega\times[0,T))$ mit $h_{|t=0} = u_{o|\partial\Omega}$, so gibt es jeweils genau eine auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$ stetige Lösung von (1) beziehungsweise (2). Diese Lösungen u und v erfüllen die Abschätzungen (63).

An Satz 8 ist unbefriedigend, daß die Hölderstetigkeit von u_o (im Fall (1)) bzw. die Stetigkeit der Randwerte ($u_{o|\partial\Omega} = h_{|t=0}$ im Fall (2)) gefordert werden muß. Tatsächlich ist diese Voraussetzung nur für die Eindeutigkeit nötig; für die Existenzaussage braucht man sie nicht, da die Konstruktion über die Potentiale durchaus zu einer Lösung führt (60). In welchem Sinne ist sie nun eindeutig? Das Maximumprinzip lieferte nur, daß es höchstens eine stetige Lösung geben könne. Stetigkeit auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$ ist aber zumindest im Fall (2) ohne stetige Randwerte eine unerfüllbare Forderung und damit ein ungeeignetes Kriterium, um die gewünschte Lösung von möglicherweise vorhandenen "pathologischen" Lösungen zu unterscheiden.
Unter einschränkenden Voraussetzungen an die Glattheit der Koeffizienten a_{ij} und b_i läßt sich jedoch ein der Problemstellung besser angemessenes Ergebnis beweisen:

1.9 Satz

Zusätzlich zu den bisherigen Voraussetzungen sollen die Koeffizienten a_{ij} einmal partiell nach den Raumvariablen differenzierbar sein, so daß diese Ableitungen ste-

tig auf $\bar{\Omega}\times[0,T)$ sind.
Falls u_o stetig auf Ω ist, f hölderstetig auf $\Omega\times(0,T)$ und g bzw. h stetig auf $\partial\Omega\times(0,T)$ ist, so gibt es genau eine Lösung u zu (1) bzw. v zu (2) mit der Eigenschaft

$$\|u(.,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{const} \quad \text{bzw.} \quad \|v(.,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{const} .$$

Beweis: Daß es Quasilösungen u und v gibt, ist schon bewiesen worden, und diese sind nach (60) auch Lösungen. Außerdem sind sie beschränkt wegen (50). Sind nun u_1 und u_2 bzw. v_1 und v_2 zwei Lösungen von (1) bzw. (2) mit einer gleichmäßigen L^2-Schranke, so gilt für $\bar{u}:=u_1-u_2$, $\bar{v}:=v_1-v_2$

$$L\bar{u} = L\bar{v} = 0 , \qquad \lim_{t\to 0} \bar{u}(x,t) = \lim_{t\to 0} \bar{v}(x,t) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega$$

$$\lim_{x\to x_o} \bar{v}(x,t) = 0 \quad \text{für } x_o\in\partial\Omega,\ t>0$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial n}(x,t) = 0 \quad \text{für } x\in\partial\Omega\ ,\ t>0.$$

Für $t>t_o>0$ sind u und v die eindeutigen stetigen Lösungen, also die Quasilösungen zum Problem

$$L\bar{u} = 0 \qquad \bar{u}_{|\,t=t_o} = \bar{u}(.,t_o) \qquad \frac{\partial\bar{u}}{\partial n} = 0$$

$$L\bar{v} = 0 \qquad \bar{v}_{|\,t=t_o} = \bar{v}(.,t_o) \qquad \bar{v}_{|\,\partial\Omega} = 0$$

Wenn man die Glattheit von $\bar{u}(.,t_o)$ und $\bar{v}(.,t_o)$ ausnutzt, so erhält man analog zu früheren Abschätzungen, daß die Zeitableitungen der Potentiale und damit von u und v gleichmäßig beschränkt sind für $t\geq t_1>t_o$. Aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt damit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \bar{u}(x,t)^2dx = \int_\Omega \bar{u}(x,t)\bar{u}_t(x,t)dx$$

$$= \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} u \, dx + \sum_i \int_\Omega b_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} u \, dx$$

$$+ \int_\Omega c \, \bar{u}^2 \, dx$$

$$= - \sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij} \bar{u}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} dx + \sum_i \int_\Omega b_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \bar{u} dx + \int_\Omega c \bar{u}^2 dx$$

wegen der homogenen Randbedingungen
für $\bar{u}$ (dasselbe gilt für $\bar{v}$)

$$= - \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} dx$$

$$+ \sum_i \int_\Omega (b_i - \sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} u \, dx + \int_\Omega c \, \bar{u}^2 dx$$

$$\leq - \int_\Omega \Big(\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} - \frac{\varepsilon}{2} \sum_i \Big| b_i - \sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \Big| \Big(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \Big)^2 \Big) dx$$

$$+ \int_\Omega \Big(\frac{1}{2\varepsilon} \sum_i \Big| b_i - \sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \Big| + c \Big) \bar{u}^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_\Omega \bar{u}^2 dx \sup_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ 0 \leq t < T}} \Big| \frac{1}{\varepsilon} \sum_i \Big| b_i(x,t) - \sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}(x,t) \Big| + 2c(x,t) \Big|$$

$$\text{mit } 0 < \varepsilon \leq \frac{\inf \{ 2 \sum a(x,t) \xi \cdot \xi \mid |\xi| = 1, x \in \bar{\Omega}, 0 \leq t < T \}}{\sup \{ \sum_i |b_i(x,t) - \sum_j \frac{a_{ij}}{x_j}(x,t)| \mid x \in \bar{\Omega}, 0 \leq t < T \}}$$

Daher ist $\frac{d}{dt} \int_\Omega \bar{u}^2 dx \leq \gamma \int_\Omega \bar{u}^2 dx$ für $t > 0$.

Außerdem folgt aus der L^2-Beschränktheit von u_1 und u_2 und aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$\lim_{t \to 0} \int_\Omega \bar{u}^2(x,t) \, dx = 0$, so daß

$\int_\Omega \bar{u}(x,t)^2 dx \leq \gamma \int_0^t \int_\Omega \bar{u}(x,\tau)^2 dx d\tau$ für alle $t > 0$ $\Rightarrow$

$\int_\Omega \bar{u}(x,t)^2 dx = 0$ für alle $t \geq 0$ (Lemma von Growall) $\Rightarrow$

$u = 0$, da $\bar{u}(.,t)$ stetig für alle $t \geq 0$.

Alle Überlegungen gelten auch für $\bar{v}$. □

Die bisher hergeleiteten Abschätzungen für die Lösungen der linearen parabolischen Anfangs-Randwertprobleme (1) und (2) sollen nun benutzt werden, um mit einem Fixpunktargument die Existenz von Lösungen bei semilinearen parabolischen Differentialgleichungssystemen nachzuweisen.

Betrachtet werde das System aus N schwach gekoppelten Anfangs-Randwertaufgaben

$$(64)\qquad \begin{aligned} Lu &= f && \text{auf } \Omega\times(0,t_1)\\ u &= u_0 && \text{auf } \Omega\times\{0\}\\ \lambda(\tfrac{\partial u}{\partial n} - g) &+ (1-\lambda)(u-h) = 0 && \text{auf } \partial\Omega\times(0,t_1) \end{aligned}$$

Dabei sei L eine Diagonalmatrix aus N parabolischen Differentialoperatoren

$$L^k = \frac{\partial}{\partial t} - \Big(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^k(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i^k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + c^k(x,t)\Big)$$

deren Koeffizienten die Glattheitsvoraussetzungen von Satz 9 erfüllen sollen. $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ sei wie vorher ein beschränktes Gebiet, dessen Rand $\partial\Omega$ für $m>1$ eine m-1-dimensionale $C^{1+\alpha}$-Mannigfaltigkeit ist. $\frac{\partial}{\partial n}$ sei die Diagonalmatrix aus den Differentialoperatoren, die auf $\partial\Omega$ die Ableitung in der jeweiligen äußeren konormalen Richtung beschreiben, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial n^k} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^k(x,t)\cos(n(x),x_j)\frac{\partial}{\partial x_i}\ .$$

λ sei eine Diagonalmatrix aus Nullen und Einsen, oBdA $\lambda^k = 1$ für $k=1,..p$ und $\lambda^k = 0$ für $k=p+1,..N$.

Für u_o,f,g und h solle die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

(65) $\quad u_o : \Omega \to \mathbb{R}^N$ sei stetig

(66) $\quad$ f : $\Omega \times (0,T) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ sei stetig und auf beschränkten Mengen beschränkt; ferner sei sei f hölderstetig in x und lipschitzstetig in u, gleichmäßig bezüglich x und t, d.h. $\exists L_1 : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ mit

$$|f(x,t,u)| \leq L_1(M,t_1) ,$$
$$|f(x,t,u)-f(x,t,v)| \leq L_1(M,t_1)|u-v|$$

für alle $x \in \Omega$, $t \in (0,t_1]$, $|u|,|v| \leq M$.

(67) $\quad$ g : $\partial\Omega \times (0,T) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ sei stetig und auf beschränkten Mengen beschränkt, außerdem lipschitzstetig in u, gleichmäßig bezüglich x und t. OBdA gelte also für g dieselbe Abschätzung wie für f.

(68) $\quad h : \partial\Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^{N-p}$ sei stetig.

1.10 Satz

Unter den Voraussetzungen (65)-(68) gibt es ein $t_1 \in (0,T]$, das nur von Ω, den Abschätzungen der Koeffizienten von L , $\|u_o\|$ und $L_1(\|u_o\|,T)$ abhängt, so daß eine stetige, auf beschränkten Mengen beschränkte Lösung

$u : \overline{\Omega} \times [0,t_1) \setminus \partial\Omega \times \{0\} \to \mathbb{R}^N$ von (64) existiert.

u ist die einzige beschränkte Lösung auf $\overline{\Omega} \times [0,t_o) \setminus \partial\Omega \times \{0\}$ für alle $t_o \leq t_1$.

Beweis: Sei $\theta \in (0,T]$ und E_θ der Banachraum der auf $\overline{\Omega} \times [0,\theta] \setminus \partial\Omega \times \{0\}$ beschränkten und stetigen Funk-

tionen. Sei $v \in E_\theta$. Dann gibt es nach Satz 5 eine stetige und beschränkte Quasilösung

$w : \bar{\Omega} \times [0,\theta] \setminus \partial\Omega \times \{0\} \to \mathbb{R}^N$ des linearen Problems

$$Lw = f(x,t,v(x,t)) \quad \text{auf } \Omega \times (0,\theta]$$

$$w_{|t=0} = u_0 \quad \text{auf } \Omega$$

$$\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial n} - g(x,t,v(x,t))\right) + (1-\lambda)(w-h(x,t)) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times (0,\theta]$$

Durch $T_\theta v := w$ wird also eine Abbildung $T_\theta : E_\theta \to E_\theta$ definiert. Nach Satz 5 gilt

$$T_\theta v\,(x,0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega \text{ , und für } x \in \partial\Omega, t>0:$$

$$\lambda\left(\frac{\partial}{\partial n} T_\theta v(x,t) - g(x,t,v(x,t))\right) + (1-\lambda)(T_\theta v(x,t) - h(x,t)) = 0 \tag{69}$$

$$T_\theta v \text{ hölderstetig auf } \Omega \times (0,\theta] \tag{70}$$

Für hinreichend kleine θ ist T_θ eine Kontraktion, denn sei $v_1, v_2 \in E_\theta$, so ist $w = T_\theta v_1 - T_\theta v_2$ eine Quasilösung des Problems

$$Lw = f(x,t,v_1(x,t)) - f(x,t,v_2(x,t)) \quad \text{auf } \Omega \times (0,\theta]$$

$$w_{|t=0} = 0 \quad \text{auf } \Omega$$

$$\lambda \frac{\partial w}{\partial n} + (1-\lambda)w = \lambda(g(x,t,v_1(x,t)) - g(x,t,v_2(x,t))) \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,\theta]$$

Aus Satz 5, (50) folgt

$$|w(x,t)| \le \kappa(\sup |g(.,v_1(.)) - g(.,v_2(.))|\, t^{1/2} + \sup |f(.,v_1(.)) - f(.,v_2(.))|\, t)$$

$$\le \kappa L_1(M,\bar{\theta})\, \|v_1 - v_2\|_{E_\theta} (t^{1/2} + t) \quad \text{für } \theta \le \bar{\theta} \tag{71}$$

und

$$|T_\theta v\,(x,t)| \le \kappa (\|u_0\| + \|h\| + L_1(M,\bar{\theta}))(t^{1/2} + t)$$

$$\text{für } \|v\|_{E_\theta} , \|v_1\|_{E_\theta} , \|v_2\|_{E_\theta} \le M ,$$

wobei die Konstante κ nur von den Abschätzungen der Koeffizienten von L, Ω und $\bar{\theta}$ abhängt.

Wählt man nun $\theta \leq \bar{\theta}$ und M so, daß

$$M := \max\left(1,\ 2\kappa\left(\|u_o\|_\infty + \|h\|_{L^\infty(\partial\Omega\times(0,\bar{\theta}])}\right)\right)$$

$$\delta := \kappa L_1(M,\bar{\theta})(\theta+\theta^{1/2}) < 1 \tag{72}$$

dann ist für $\|v\|_{E_\theta} \leq M$

$$\|T_\theta v\|_{E_\theta} \leq \varkappa(\|u_o\| + \|h\|) + \kappa L_1(M,\bar{\theta})(\theta^{1/2}+\theta)$$
$$\leq M/2 + \delta \leq M$$

und für $\|v_1\|_{E_\theta}$, $\|v_2\|_{E_\theta} \leq M$

$$\|T_\theta v_1 - T_\theta v_2\|_{E_\theta} \leq \kappa L_1(M,\bar{\theta})(\theta^{1/2}+\theta)\|v_1-v_2\|_{E_\theta}$$
$$\leq \delta\ \|v_1-v_2\|_{E_\theta}$$

T_θ bildet daher die abgeschlossene Menge $\{\ v \in E_\theta \mid \|v\|_{E_\theta} \leq M\ \}$ in sich ab und ist dort eine Kontraktion. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt die Existenz eines $u \in E_\theta$ mit $\|u\|_{E_\theta} \leq M$ und $T_\theta u = u$. Aus (70) folgt, daß $u = T_\theta u$ hölderstetig in $\Omega\times(0,\theta]$ ist; da f nach Voraussetzung hölderstetig in x und lipschitzstetig in u ist, ist die Abbildung $x \to f(x,t,u(x,t))$ hölderstetig in x für $x\in\Omega, 0<t\leq\theta$. Aus (55) folgt $Lu = f$. Zusammen mit (69) sieht man, daß u eine klassische Lösung von (64) ist.
Die Eindeutigkeit der Lösung folgt noch nicht unmittelbar aus dem Fixpunktsatz, da es ja noch Lösungen v mit $\|v\| > M$ geben könnte. Sei also $\theta_1 \leq \theta$, $u \neq v \in E_{\theta_1}$ und $\|v\|_{E_{\theta_1}} \leq M_1$. Ist

$t_o = \inf\{t\in(0,\theta_1] \mid u(t) \neq v(t)\}$, so folgt aus (71)

$$|u(x,t)-v(x,t)| \leq \kappa\, L_1(\max(M,M_1),\theta_1)\ \|u-v\|_{E_t}\ ((t-t_o)^{1/2}+t-t_o)$$

für $t_o < t \leq \theta_1$. Für hinreichend kleine $t-t_o$ ist

$\kappa \cdot L_1(\max(M,M_1),\theta_1)\cdot((t-t_o)^{1/2}+t-t_o) < 1$ und daher $\|u-v\|_{E_t} < \|u-v\|_{E_t}$. Die Annahme $u \neq v$ auf $\bar{\Omega}\times[0,\theta_1]$ führt also zum Widerspruch. □

1.11 Korollar

Die Voraussetzungen von Satz 10 seien erfüllt. Die eindeutige beschränkte Lösung u von (64) existiert auf einem maximalen Existenzintervall $[0,T_{max})$. Falls $T_{max} < \infty$, ist $\lim_{t\to T_{max}} \|u(.,t)\|_\infty = \infty$

Beweis: Die Lösung u existiere auf $[0,t_1)$, $t_1<\infty$, und es sei $\sup\{|u(x,t)| \mid x\in\Omega,\ 0\le t<t_1\} =: M$. Sei $0<\varepsilon<t_1$ beliebig und $t_o := t_1-\varepsilon$.

Die Lösung an der Stelle $t=t_o$ werde als neue Anfangsbedingung angesehen. Sei nun $\bar{t}>\bar{t}_1>t_1$ und $\bar{M} := \max(1, 2\kappa(M + \|h\|_{L^\infty(\partial\Omega\times(0,t_1])}))$. Wie in (72) existiert dann eine eindeutige beschränkte Lösung auf $\bar{\Omega}\times[t_o,t_o+\theta]$, falls $\theta \le \bar{t}_1-t_o$ so gewählt wird, daß $\kappa L_1(\bar{M},\bar{t}_1)(\theta+\theta^{1/2}) < 1$. Da diese Bedingung unabhängig von ε ist, können wir nachträglich über ε verfügen und wählen $\varepsilon<\theta$. Es existiert also eine Lösung auf $[t_1-\varepsilon,\ t_1+\theta-\varepsilon]$, die wegen der Eindeutigkeit auf $[t_1-\varepsilon,t_1]$ mit u übereinstimmt. Die Lösung u läßt sich also über t_1 hinaus fortsetzen. □

III.2 Globale Existenz und Beschränktheit

In diesem Abschnitt wird ein Reaktions-Diffusions-Gleichungssystem für einen trägervermittelten Transport untersucht, in dem der Träger sich sowohl im Innern der Membran mit dem Substrat verbinden kann als auch in einer Randschicht Zugang zu den äußeren Reservoiren hat. Nach den Überlegungen im ersten Kapitel (Abschnitt 5) könnte eine Beschreibung folgendermaßen aussehen:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\dot{s} &= D_s s'' + \bar{k}p - ksc \qquad & s(0,t) &= s_o,\ s(1,t) = s_1\\
\dot{c} &= D_c c'' + \bar{k}p - ksc & -D_c c'(0,t) &= \bar{a}p(0,t) - as_o c(1,t)\\
& & D_c c'(1,t) &= \bar{a}p(1,t) - as_1 c(1,t)\\
\dot{p} &= D_p p'' - \bar{k}p + ksc & -D_p p'(0,t) &= -\bar{a}p(0,t) + as_o c(0,t)\\
& & D_p p'(1,t) &= -\bar{a}p(1,t) + as_1 c(1,t)
\end{aligned}
$$

$$
s(.,0) = s_o \qquad c(.,0) = c_o \qquad p(.,0) = p_o
$$

Mit verallgemeinerten Reaktionstermen lautet das zugehörige Anfangs-Randwertproblem:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\dot{s} &= D_s s'' + f_1(s,c,p) \qquad & s(0,t) &= s_o,\ s(1,t) = s_1\\
& & -D_c c'(0,t) &= D_p p'(0,t)\\
\dot{c} &= D_c c'' + f_2(s,c,p) & &= g_o(s_o, c(0,t), p(0,t))\\
\dot{p} &= D_p p'' - f_2(s,c,p) & D_c c'(1,t) &= -D_p p'(1,t)\\
& & &= g_1(s_1, c(1,t), p(1,t))
\end{aligned}
$$

$$
s(.,0) = s_o \qquad c(.,0) = c_o \qquad p(.,0) = p_o
$$

Durch diesen Ansatz wird auch berücksichtigt, daß die Reaktionen an den beiden Membranoberflächen verschieden sein könnten.

Es sollen die Voraussetzungen erfüllt sein, die nach dem letzten Abschnitt Existenz und Eindeutigkeit einer lokalen Lösung garantieren:

(3) f_1, f_2, g_1 und g_o sind lipschitzstetig

s_o, c_o und p_o sind beschränkt und stetig auf $(0,1)$

Ferner sollen f und g so beschaffen sein, daß die Lösungen zu positiven Anfangsfunktionen positiv bleiben. Wenn f_1, f_2, g_o und g_1 chemische Reaktionen beschreiben sollen, muß dies natürlich der Fall sein. Daher gelte für alle $s,c,p \geq 0$

(4)
$$f_1(0,c,p) \geq 0 \qquad s_o, s_1 \geq 0$$
$$f_2(s,0,p) \geq 0,\ g_o(s,0,p) \geq 0,\ g_1(s,0,p) \geq 0$$
$$f_2(s,c,0) \leq 0,\ g_o(s,c,0) \leq 0,\ g_1(s,c,0) \leq 0$$
$$s_o \geq 0, c_o \geq 0,\ p_o \geq 0 \quad \text{für die Anfangsfunktionen}$$

Schließlich müssen die Nichtlinearitäten f_1, f_2, g_o und g_1 Wachstumsbedingungen erfüllen:

(5)
$$f_i(s,c,p) \leq \bar{k}p\ , \quad -f_2(s,c,p) \leq k(s)c,\ i=1,2$$
$$g_i(s,c,p) \leq \bar{a}p\ , \quad -g_i(s,c,p) \leq a(s)c,\ i=0,1$$

für alle $s,c,p \geq 0$, wobei k und a nichtnegative und monoton nicht fallende Funktionen von s sind.

Ziel ist es nun zu zeigen, daß die Lösungen beschränkt bleiben. Aus Kor. 11 des vorigen Abschnitts folgt, daß sie dann auch global fortsetzbar sind.

2.1 Satz

Die Voraussetzungen (3)-(5) seien erfüllt. Dann sind die Lösungen der Anfangs-Randwertaufgabe (2) global beschränkt durch eine Konstante, die von Schranken für die Anfangsfunktionen, den Parametern $1, s_o, s_1, a(s_o)$, $a(s_1), \bar{a}, \bar{k}$ und der Funktion k abhängt.

Beweis: OBdA sei im folgenden $l = \pi$. Die Größe

$$C := \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (c(x,t)+p(x,t))dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (c_0(x)+p_0(x))dx$$

ist zeitunabhängig und liefert wegen $c\geq 0, p\geq 0$ eine a-priori-Abschätzung von c und p. In II.3 wurde gezeigt, daß diese L^1-Abschätzung bereits ausreicht für eine L^∞-Abschätzung von s,c und p, wenn $g_0=g_1=0$ ist. Dieser Beweis kann für den Nachweis der Beschränktheit von s übernommen werden; es gilt also $s(x,t) \leq \bar{s}$ für $t\geq 0$, $0\leq x\leq \pi$.
Um für die beiden anderen Gleichungen die Ausgeartetheit des Neumannproblems umgehen zu können, werden sie folgendermaßen formuliert:

$$\begin{aligned} \dot{c} - D_c c'' + \bar{k}c &= f_2 + \bar{k}c \\ \dot{p} - D_p p'' + \bar{k}p &= -f_2 + \bar{k}p \end{aligned} \tag{6}$$

mit denselben Anfangs- und Randbedingungen.
Die Lösungen sind Summen von Anteilen, die jeweils von den Anfangs- und Randbedingungen und von den Nichtlinearitäten herkommen.
Mit den Greenschen Funktionen

$$G(t,x,\xi) = \frac{1}{\pi} e^{-\bar{k}t} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\bar{k}+Dn^2)t} \cos nx \cos n\xi$$

lautet die Zerlegung

$$c = c^0 + c^1 + c^2 \qquad p = p^0 + p^1 + p^2$$

$$c^0(x,t) = \int_0^\pi G_c(t,x,\xi)c_0(\xi)d\xi$$

$$\begin{aligned} c^1(x,t) = {} & \int_0^t G_c(t-\tau,x,0)g_0(s_0,c(0,\tau),p(0,\tau))\,d\tau \\ & + \int_0^t G_c(t-\tau,x,\pi)g_1(s_1,c(\pi,\tau),p(\pi,\tau))\,d\tau \end{aligned} \tag{7}$$

$$c^2(x,t) = \int_0^t\int_0^\pi G_c(t-\tau,x,\xi)(f_2+\bar{k}c)(\xi,\tau)\,d\xi d\tau$$

entsprechend p^0, p^1, p^2

Wie früher (in II.3 und in II.6) werden c^o, p^o, c^2 und p^2 abgeschätzt:

$$c^o(x,t) \leq \sup\{c_o(x) \mid 0\leq x\leq l\} = \|c_o\|_\infty$$

$$p^o(x,t) \leq \sup\{p_o(x) \mid 0\leq x\leq l\} = \|p_o\|_\infty$$

$$c^2(x,t) \leq \frac{1}{\pi}\Big(\int_o^t e^{-\bar{k}\tau}d\tau + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_o^t e^{-(\bar{k}+D_c n^2)\tau}d\tau\Big)\bar{k} \cdot \sup_{0\leq\tau\leq t}\int_o^\pi (c(\xi,\tau)+p(\xi,\tau))d\xi$$

$$\leq \Big(1+\frac{\pi^2\bar{k}}{3D_c}\Big)C$$

$$p^2(x,t) \leq \Big(1+\frac{\pi^2\bar{k}}{3D_p}\Big)\max(1,k(\tilde{s})/\bar{k})\,C$$

Die Summanden c^1 und p^1 sind schwieriger in den Griff zu bekommen, denn zunächst verfügt man noch nicht über Schranken für $c(0,t)$, $c(\pi,t)$, $p(0,t)$ und $p(\pi,t)$. Die folgende Überlegung hilft hier weiter:

$$\begin{aligned} c(0,t)+c(\pi,t) &= c^o(0,t)+c^o(\pi,t)+c^1(0,t)+c^1(\pi,t) \\ &\quad + c^2(0,t)+c^2(\pi,t) \\ &= \int_o^\pi \tilde{G}_c(t,\xi)c_o(\xi)d\xi \\ &\quad + \int_o^t \tilde{G}_c(t-\tau,0)g_o(s_o,c(0,\tau),p(0,\tau))d\tau \\ &\quad + \int_o^t \tilde{G}_c(t-\tau,\pi)g_1(s_1,c(\pi,\tau),p(\pi,\tau))d\tau \\ &\quad + \int_o^t\int_o^\pi \tilde{G}_c(t-\tau,\xi)(f_2+\bar{k}c)(\xi,\tau)d\xi d\tau \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} p(0,t)+p(\pi,t) &= \int_o^\pi \tilde{G}_p(t,\xi)p_o(\xi)d\xi \\ &\quad - \int_o^t \tilde{G}_p(t-\tau,0)g_o(s_o,c(0,\tau),p(0,\tau))d\tau \\ &\quad - \int_o^t \tilde{G}_p(t-\tau,\pi)g_1(s_1,c(\pi,\tau),p(\pi,\tau))d\tau \\ &\quad - \int_o^t\int_o^\pi \tilde{G}_p(t-\tau,\xi)(f_2-\bar{k}p)(\xi,\tau)d\xi d\tau \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\tilde{G}(t,\xi) := G(t,0,\xi) + G(t,\pi,\xi)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(e^{-\bar{k}t} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\bar{k}+Dn^2)t}(1 + \cos n\pi)\cos n\xi\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(e^{-\bar{k}t} + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\bar{k}+4Dn^2)t}\cos(2n\xi)\right)$$

$$\geq 0 ,$$

denn $\tilde{G}(t,\xi)$ ist die Greensche Funktion zu derselben Differentialgleichung mit Neumann-Randbedingungen auf dem Intervall $(0,\pi/2)$, ausgewertet an der Stelle $x=0$. Mit $\tilde{G}(t,0) = \tilde{G}(t,\pi)$ führt (8) zu der Abschätzung

$$\begin{aligned} c(0,t) + c(\pi,t) \leq\ & 2\|c_o\|_\infty + 2\left(1 + \frac{\pi^2\bar{k}}{3D_c}\right)C \\ & + \int_o^t \tilde{G}_c(t-\tau,0)\left(g_o(s_o,c(0,\tau),p(0,\tau)) + g_1(s_1,c(\pi,\tau),p(\pi,\tau))\right) d\tau \end{aligned} \tag{9}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} p(0,t) + p(\pi,t) \leq\ & 2\|p_o\|_\infty + 2\left(1 + \frac{\pi^2\bar{k}}{3D_p}\right)\max(1,k(\bar{s})/\bar{k})C \\ & - \int_o^t \tilde{G}_p(t-\tau,0)\left(g_o(s_o,c(0,\tau),p(0,\tau)) + g_1(s_1,c(\pi,\tau),p(\pi,\tau))\right)d\tau \end{aligned} \tag{10}$$

Wenn man die Integrale in (9) und (10) abschätzen will, erhält man Faltungen von $\tilde{G}_c$ mit $p(0,.)+p(\pi,.)$ bzw. von $\tilde{G}_p$ mit $c(0,.)+c(\pi,.)$. Diese Faltungen müssen daher zunächst untersucht werden. Aus (9) erhält man

$$\begin{aligned} & \int_o^t \tilde{G}_p(t-\tau,0)(c(0,\tau)+c(\pi,\tau))d\tau \\ & \leq \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\bar{k}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{k} + 4D_p n^2}\right)\left(\|c_o\|_\infty + \left(1 + \frac{\pi^2\bar{k}}{3D_c}\right)C\right) \\ & \quad + \int_o^t\int_o^\tau \tilde{G}_p(t-\tau,0)\tilde{G}_c(\tau-\sigma,0)\left(g_o(..\sigma)+g_1(..\sigma)\right) d\sigma d\tau \\ & \leq \left(\frac{4}{\bar{k}\pi} + \frac{\pi}{3D_p}\right)\left(\|c_o\|_\infty + \left(1+\frac{\pi^2\bar{k}}{3D_c}\right)C\right) \\ & \quad + \int_o^t\left(\int_\sigma^t \tilde{G}_p(t-\tau,0)\tilde{G}_c(\tau-\sigma,0)d\tau\right)\left(g_o(..\sigma)+g_1(..\sigma)\right) d\sigma \end{aligned}$$

und

$$\int_0^t \tilde{G}_c(t-\tau,0)(p(0,\tau)+p(\pi,\tau))d\tau$$

$$\leq \left(\frac{4}{\bar{k}\pi} + \frac{\pi}{3D_c}\right)\left(\|p_0\|_\infty + \left(\frac{1}{\bar{k}} + \frac{\pi^2}{3D_p}\right)\max(\bar{k},k(\bar{s}))C\right)$$

$$- \int_0^t \left(\int_\sigma^t \tilde{G}_c(t-\tau,0)\tilde{G}_p(\tau-\sigma,0)d\tau\right)(g_0(..\sigma)+g_1(..\sigma))\,d\sigma$$

und wegen

$$\int_\sigma^t \tilde{G}_c(t-\tau,0)\tilde{G}_p(\tau-\sigma,0)d\tau = \int_\sigma^t \tilde{G}_p(t-\tau,0)\tilde{G}_c(\tau-\sigma,0)d\tau$$

erhält man

$$\int_0^t \tilde{G}_p(t-\tau,0)(c(0,\tau)+c(\pi,\tau))d\tau + \int_0^t \tilde{G}_c(t-\tau,0)(p(0,\tau)+p(\pi,\tau))d\tau$$

$$\leq \left(\frac{4}{\bar{k}\pi} + \frac{\pi}{3D_p}\right)\left(\|c_0\|_\infty + \left(1+\frac{\pi^2\bar{k}}{3D_c}\right)C\right)$$

$$+\left(\frac{4}{\bar{k}\pi} + \frac{\pi}{3D_c}\right)\left(\|p_0\|_\infty + \left(1+\frac{\pi^2\bar{k}}{3D_p}\right)\max(1,k(\bar{s})/\bar{k})\right) =: M$$

Da $\tilde{G}_c$ und $\tilde{G}_p \geq 0$, gilt diese letzte Abschätzung nun auch für beide Summanden. Aus der Gleichung (7) erhält man jetzt eine Abschätzung für c^1:

$$c^1(x,t) \leq \int_0^t (G_c(t-\tau,x,0)\bar{a}p(0,\tau) + G_c(t-\tau,x,\pi)\bar{a}p(\pi,\tau))d\tau$$

$$\leq \bar{a}\int_0^t (G_c(t-\tau,x,0)+G_c(t-\tau,x,\pi))(p(0,\tau)+p(\pi,\tau))\,d\tau$$

$$= \bar{a}\int_0^t \tilde{G}_c(t-\tau,x)(p(0,\tau)+p(\pi,\tau))d\tau$$

$$\leq \bar{a}\int_0^t \tilde{G}_c(t-\tau,0)(p(0,\tau)+p(\pi,\tau))d\tau \leq \bar{a}M$$

und genauso $p^1(x,t) \leq a(\bar{s})M$. ∎

III.3 Existenz stationärer Lösungen

Betrachtet werde ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, das über eine Substanz s in Kontakt zur "Außenwelt" $\mathbb{R}^m \setminus \bar{\Omega}$ steht. Außerdem gibt es in Ω einen freien und einen beladenen Carrier (c und p), die Ω nicht verlassen können. s und c können miteinander reagieren, dabei entstehe das Produkt p. Diese Reaktionen sollen möglicherweise auch in einer Randschicht zugelassen werden; eventuell mit anderen Reaktionsgeschwindigkeiten oder sonst anderen Reaktionsmechanismen, die aber zu denselben Erhaltungsgrößen für das "gut gerührte" chemische System ohne Diffusion führen:

$n_1 c + n_2 p = \text{const}$, $n_3 s + n_4 p = \text{const}$

OBdA seien $n_1=n_2=n_3=n_4=1$, andernfalls ersetze man einfach c durch $n_1 n_4 c$, p durch $n_2 n_4 p$ und s durch $n_2 n_3 s$. Die Reaktionsgleichungen lauten dann

$$\dot{s} = \dot{c} = -\dot{p} = f(s,c,p)$$

Findet außerdem Diffusion statt, so heißt das System mit den entsprechenden Randbedingungen (vgl. I.36, I.38)

$$(1)\qquad \begin{aligned} \dot{s} &= D_s \Delta s + f(s,c,p) & D_s \tfrac{\partial s}{\partial n} &= g(s,c,p) + g_1(s,c,p) \\ & & &\text{oder } s_{|\partial\Omega} = s_0 \\ \dot{c} &= D_c \Delta c + f(s,c,p) & D_c \tfrac{\partial c}{\partial n} &= g(s,c,p) \\ \dot{p} &= D_p \Delta p - f(s,c,p) & D_p \tfrac{\partial p}{\partial n} &= -g(s,c,p) \end{aligned}$$

g und g_1 dürfen außerdem noch von der Ortsvariablen x und der äußeren Substratkonzentration $s_0(x)$ abhängen. Dieses System hat eine Erhaltungsgröße

$$C := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega (c(x,t)+p(x,t))dx = \text{const} ,$$

der anderen Erhaltungsgröße entspricht keine im parti-

ellen Differentialgleichungssystem. Die Größe $|\Omega|C$ kann man als "Gesamtcarriermenge" auffassen. Wir betrachten nun stationäre Lösungen. Setzt man $\bar{s}=D_s s$, $\bar{c}=D_c c$, $\bar{p}=D_p p$, $\bar{f}(\bar{s},\bar{c},\bar{p}) = f(\bar{s}/D_s,\bar{c}/D_c,\bar{p}/D_p)$, $\bar{g}(\bar{s},\bar{c},\bar{p}) = g(\bar{s}/D_s,\bar{c}/D_c,\bar{p}/D_p)$, $\bar{g}_1(\bar{s},\bar{c},\bar{p}) = g_1(\bar{s}/D_s,\bar{c}/D_c,\bar{p}/D_p)$, $\bar{s}_o = D_s s_o$ und läßt anschließend die Balken wieder weg, so lautet das System

$$
\begin{aligned}
&\Delta s + f(s,c,p) = 0 && s_{|\partial\Omega} = s_o \\
(2)\qquad &\Delta c + f(s,c,p) = 0 && \frac{\partial c}{\partial n}_{|\partial\Omega} = g(s,c,p) \\
&\Delta p - f(s,c,p) = 0 && \frac{\partial p}{\partial n}_{|\partial\Omega} = -g(s,c,p)
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
&\Delta s + f(s,c,p) = 0 && \frac{\partial s}{\partial n} = g(s,c,p)+g_1(s,c,p) \\
(2a)\qquad &\Delta c + f(s,c,p) = 0 && \frac{\partial c}{\partial n} = g(s,c,p) \\
&\Delta p - f(s,c,p) = 0 && \frac{\partial p}{\partial n} = -\,g(s,c,p)
\end{aligned}
$$

$C := \int_\Omega (\alpha c(x)+\beta p(x))dx$ mit $\alpha := 1/(D_c|\Omega|)$, $\beta := 1/(D_p|\Omega|)$ ist durch die Anfangsbedingungen festgelegt und daher für das stationäre Problem eine vorgegebene Konstante. Sie steht aber in keiner natürlichen Beziehung zum System (2) mehr. Dieses hat vielmehr eine andere räumliche Integrationskonstante $K = c+p$.
Im folgenden soll so vorgegangen werden: Zu vorgegebenem K wird entweder c oder p und damit eine der Reaktionsgleichungen eliminiert. Es wird gezeigt, daß das resultierende System zu jedem $K\geq 0$ genau eine Lösung hat. Zu dieser Lösung gehört natürlich ein $C:= \int_\Omega (\alpha c+\beta p)dx$; die Abbildung $K \to C$ bildet $\mathbb{R}_+$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+$ ab, daher folgert man, daß es zu jedem $C\geq 0$ genau eine Lösung gibt.
Durch Elimination von c erhält man zu vorgegebenem K

$$(3)\qquad \begin{aligned} \Delta s + \tilde{f}(s,p,K) &= 0 \qquad & s_{|\partial\Omega} &= s_o \\ \Delta p - \tilde{f}(s,p,K) &= 0 \qquad & \frac{\partial p}{\partial n}_{|\partial\Omega} &= -\tilde{g}(s,p,K) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$(3a)\qquad \begin{aligned} \Delta s + \tilde{f}(s,p,K) &= 0 \qquad & \frac{\partial s}{\partial n} &= \tilde{g}(s,p,K)+\tilde{g}_1(s,p,K) \\ \Delta p - \tilde{f}(s,p,K) &= 0 \qquad & \frac{\partial p}{\partial n} &= -\tilde{g}(s,p,K) \end{aligned}$$

mit $\tilde{f}(s,p,K) := f(s,K-p,p)$, $\tilde{g}(s,p,K) := g(s,K-p,p)$,
und $\tilde{g}_1(s,p,K) := g_1(s,K-p,p)$

Die folgenden Glattheits- und Monotonievoraussetzungen werden benötigt:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\partial\Omega \text{ ist eine } C^{2+\alpha}\text{-Mannigfaltigkeit, } s_o \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega) \\ &f,g,g_1 : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R} \text{ sind stetig differenzierbar} \end{aligned}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial s} < 0 \quad \text{für } s>0,c>0,p>0 \\ \frac{\partial f}{\partial p} \geq 0,\ \frac{\partial f}{\partial c} \leq 0 \quad \text{für } s\geq 0,c\geq 0,p\geq 0;\ f(s,0,p)>0 \text{ für } s,p>0 \\ \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial c} > 0 \quad \text{für } s\geq 0,\ p>0,\ c>0 \\ \frac{\partial g}{\partial c} \leq 0,\ \frac{\partial g}{\partial p} \geq 0 \quad \text{für } s\geq 0,\ c\geq 0,\ p\geq 0 \\ \frac{\partial g}{\partial s} \leq 0 \quad \text{für } s\geq 0,\ c\geq 0,\ p\geq 0 \text{ im Fall (2a)} \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} &f(0,c,0) = 0,\ f(s,0,0) = 0,\ g(s,0,0) = 0 \\ &g(0,c,p) + g_1(0,c,p) \geq 0 \quad \text{für } s,c,p \geq 0 \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen (6) sind zusammen mit den Monotoniebedingungen (5) äquivalent zu
$f(s,c,0) \leq 0,\ f(s,0,p) \geq 0,\ f(0,c,p) \geq 0$
$g(s,c,0) \leq 0,\ g(s,0,p) \geq 0,\ g(0,c,p) + g_1(0,c,p) \geq 0$
und sichern damit die Invarianz des Kegels der nichtnegativen Funktionen auf Ω .
Für $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ bedeuten die Voraussetzungen (5) und (6):

$$
(7)\qquad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} < 0 \quad \text{für} \quad s>0,\ 0<p<K \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial K} \leq 0 \quad \text{für} \quad s\geq 0,\ 0\leq p\leq K \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} > 0 \quad \text{für} \quad s\geq 0, 0<p<K;\ \tilde{f}(s,K,K)>0 \text{ für } s,K>0 \\ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial K} \leq 0,\ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial p} \geq 0 \quad \text{für } s\geq 0,\ 0\leq p\leq K \\ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial s} \leq 0 \quad \text{für} \quad s\geq 0,\ 0\leq p\leq K \quad \text{im Fall (3a)} \end{cases}
$$

$$
(8)\qquad \tilde{f}(0,0,K) = \tilde{f}(s,0,0) = \tilde{g}(s,0,0) = 0 \ \forall s,K\geq 0
$$

Zu gegebenem $K\geq 0$ werden jetzt Rechtecke im nichtnegativen Kegel des Phasenraums $R = [\underline{s},\bar{s}]\times[\underline{p},\bar{p}]$ konstruiert, für die gilt:

$$
(9)\qquad \underline{s} \leq s_0(x) \leq \bar{s} \quad \text{für alle } x\in\partial\Omega \text{ im Fall der Dirichletrandbedingungen für } s
$$

$$
(10)\qquad \begin{array}{l} \text{Die Vektoren der Richtungsfelder} \\ (\tilde{f}(s,p,K),-\tilde{f}(s,p,K) \text{ und } (0,-\tilde{g}(s,p,K) \\ \qquad\qquad \text{bzw. } ((\tilde{g}+\tilde{g}_1)(s,p,K),-\tilde{g}(s,p,K)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{im Fall (3a)} \\ \text{zeigen auf } \partial R \text{ nie nach außen.} \end{array}
$$

Wegen der Monotoniebedingungen in (7) ist (10) äquivalent zu der folgenden Formulierung der "Invarianz-Bedingungen":

$$
(11)\qquad \begin{array}{l} \tilde{f}(\underline{s},\underline{p},K) = \tilde{f}(\bar{s},\bar{p},K) = 0 \\ \tilde{g}(\underline{s},\underline{p},K) \leq 0 \leq \tilde{g}(\bar{s},\bar{p},K) \\ (\tilde{g}+\tilde{g}_1)(\underline{s},\underline{p},K) \geq 0 \geq (\tilde{g}+\tilde{g}_1)(\bar{s},\bar{p},K) \text{ für } \underline{p}\leq p\leq \bar{p} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{im Fall (3a)} \end{array}
$$

Wegen $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} < 0$ und $\tilde{f}(0,0,K) = 0$ führt die Auflösung der Gleichung $\tilde{f}(s,p,K) = 0$ nach p zu einer Abbildung

$h : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$, $(s,K) \to p$ mit $\frac{\partial h}{\partial s} > 0$ für $s,K>0$ (7)

und $h(s,K) \leq K$ für alle $s,K\geq 0$.

Zu vorgegebenem $K,\underline{s},\bar{s} = 0$ gibt es also $\underline{p},\bar{p} \in [0,K]$ mit $\tilde{f}(\underline{s},\underline{p},K) = \tilde{f}(\bar{s},\bar{p},K) = 0$; falls $K>0$ und $\underline{s}<\bar{s}$, ist auch $\underline{p}<\bar{p}$. Die Invarianzbedingung für $\tilde{g}$ kann erfüllt werden, wenn es $\underline{s}$ und $\bar{s}$ gibt mit $\underline{s}<\bar{s}$ und

$$\tilde{g}(\underline{s},h(\underline{s},K),K) \leq 0 \leq \tilde{g}(\bar{s},h(\bar{s},K),K)$$

Das ist trivialerweise möglich, falls $g=0$.
Wenn es eine Konstante $a\geq 0$ gibt mit $g(s,c,p) \geq af(s,c,p)$ für alle $s,c,p \geq 0$, so ist für alle $\bar{s}>0$ $\tilde{g}(\bar{s},h(\bar{s},K),K) \geq 0$; und mit $\underline{s}:=0$ ist $\tilde{g}(\underline{s},h(\underline{s},K),K) \leq \tilde{g}(0,0,K) = g(0,K,0) \leq 0$. Im Fall der Dirichletrandbedingungen gibt es also invariante Rechtecke der Form $R = [0,\bar{s}]\times[0,\bar{p}]$.

Grundlage des folgenden Existenzbeweises ist das Maximumprinzip, das in der hier benötigten Form angegeben werden soll:

3.1 Lemma (Maximumprinzip)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen, $u \in C^2(\Omega,\mathbb{R})$
$f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gleichmäßig lipschitz in u und $f(x,0) \leq 0$ für alle $x\in\Omega$. Außerdem sei $u\leq 0$ und $\Delta u + f(x,u) \geq 0$ auf Ω. Dann gilt:
Wenn es ein $x_0\in\Omega$ gibt mit $u(x_0)=0$, so ist $u\equiv 0$. Ist $u(x_0) = 0$ in einem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$, in dem eine Normale existiert, so ist $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0$, falls $u\not\equiv 0$.

Beweis: u ist eine zeitlich konstante Lösung der parabolischen Differentialungleichung

$\dot{u} \leq \Delta u + f(x,u)$ auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$ mit $u\leq 0$.

Sei $t_0>0$ und $u(x_0,t_0) = u(x_0) = 0$.

Da $f(x,0) \leq 0$ und f lipschitz, gibt es ein $\delta>0$

mit $f(x,u) \leq \delta|u|$ für $x\in\Omega$ und $u \in \mathbb{R}$.
Wähle $c>\delta$ und setze

$v(x,t) := u(x)\, e^{ct}$. Dann ist $v\leq 0$, $v(x_o,t_o) = 0$ und

$$\dot{v} - \Delta v \leq f(x, v\, e^{-ct})\, e^{ct} + cv$$
$$\leq -\delta(v\, e^{-ct})\, e^{ct} + cv = (c-\delta)v \leq 0 \quad \text{auf } \Omega\times\mathbb{R}_+$$

Ist $x_o\in\Omega$, so folgt aus dem starken Maximumprinzip aus $v(x_o,t_o) = 0$ $v\leq 0 \Rightarrow u\equiv 0$. Falls $x_o\in\partial\Omega$ und $u\not\equiv 0$, so gilt, falls in x_o eine Normale existiert, $\frac{\partial v}{\partial n}(x_o,t_o) > 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n}(x_o) > 0$.

3.2 Lemma

Es seien die Voraussetzungen (4),(5) und (6) erfüllt, und für ein $K\geq 0$ und ein Rechteck $R = [\underline{s},\bar{s}]\times[\underline{p},\bar{p}]$ mit $0\leq\underline{s}\leq\bar{s}$ und $0\leq\underline{p}\leq\bar{p}\leq K$ gelte (9) und (10). Dann gibt es eine klassische Lösung von (3) bzw. (3a), die ganz in R liegt. Es gibt also eine nichtnegative Lösung von (2) bzw. (2a) mit $c+p=K$.

Beweis: Der Beweis ist analog zu einer Arbeit von Rothe [58]. Dort werden nur gleichartige Randbedingungen für alle Komponenten des Systems betrachtet, dafür aber statt der Rechtecke im Phasenraum kompakte konvexe Mengen.
Der Beweis benutzt die Theorie der Abbildungsgrade für Abbildungen, die sich um einen kompakten Operator von der Identität unterscheiden [11].
Im folgenden soll der Übersichtlichkeit halber nur der Fall der Dirichletrandbedingungen für s behandelt werden. Die Übertragung auf den anderen Fall

ist klar.

Die Verbindung zum linearen Problem wird durch eine Homotopie hergestellt. Zunächst sei $\underline{s} < s_o(x) < \overline{s}$ für alle $x \in \Omega$. Wir wählen eine Konstante p_o mit $\underline{p} = h(\underline{s},K) < p_o < h(\overline{s},K) = \overline{p}$. Dann ist das betrachtete Problem äquivalent zu dem folgenden:

$$(13) \qquad \begin{array}{ll} \Delta s = -\tilde{f} & s = s_o \\ \Delta p - (p-p_o) = \tilde{f} - (p-p_o) & \frac{\partial p}{\partial n} = -\tilde{g} \end{array} \quad \text{auf } \partial\Omega$$

Auf diese Weise wird die Ausgeartetheit des Neumannproblems umgangen. (13) kann auch als Integralgleichung im Banachraum $C(\overline{\Omega})$ aufgefaßt werden. Denn ist $u = (s,p)$ eine (klassische) Lösung, so ist $u \in C^{1+1}(\overline{\Omega})$, daher $\tilde{f} \circ u \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ und $\tilde{g} \circ u \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, und die Lösung ist dann in $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ (Theorem 6.14 und 6.31 in [20]) und läßt sich darstellen als

$$(14) \qquad \begin{aligned} s &= G_D\tilde{f} + R_D s_o \\ p &= G_N(p-p_o - \tilde{f}) + p_o - R_N\tilde{g} \end{aligned}$$

Dabei sind G_D und G_N jeweils die Lösungsoperatoren der entsprechenden linearen Dirichlet- und Neumann-Randwertprobleme; R_D und R_N sind die Randoperatoren. Für diese gilt

$$(15) \qquad \begin{aligned} \|G_D v\|_{2+\alpha} &\leq \text{const } \|v\|_{\alpha} \\ \|G_N v\|_{2+\alpha} &\leq \text{const } \|v\|_{\alpha} \\ \|R_N v\|_{2+\alpha} &\leq \text{const } \|v\|_{1+\alpha} \end{aligned}$$

und mit $\beta \in (0,1]$

$$\begin{aligned} \|G_D v\|_{1+\beta} &\leq \text{const } \|v\|_{o} \\ \|G_N v\|_{1+\beta} &\leq \text{const } \|v\|_{o} \\ \|R_N v\|_{\beta} &\leq \text{const } \|v\|_{o} \end{aligned}$$

Daher sind G_D, G_N und $R_N \circ t$ kompakte Abbildungen von $C(\overline{\Omega})$ in $C(\overline{\Omega})$, wobei mit t der Spuroperator

$t : C(\bar{\Omega}) \to C(\partial\Omega)$, $v \to v_{|\partial\Omega}$ gemeint ist.

Die beiden Integralgleichungen können zusammengefaßt werden zu

(16) $\qquad (I-T)u = u_o$

mit $u = (s,p)$, $u_o = (R_D s_o, p_o)$, T kompakter Operator.

Ziel ist es nun zu zeigen, daß diese Gleichung eine Lösung hat, die in

$G := \{ u \in C(\bar{\Omega},\mathbb{R}^2) \mid u(x) \in \mathring{R} \text{ für alle } x \in \bar{\Omega} \}$ liegt.

Dazu werde die Homotopie $\lambda \to I - \lambda T$ untersucht. Der Abbildungsgrad $\deg(I-\lambda T, G, u_o)$ existiert und ist unabhängig von λ, falls für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt: $u_o \notin (I-\lambda T)(\partial\Omega)$ (siehe z.B. [11]). Es ist also zu zeigen, daß für jede Lösung $u \in C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)$ von

(17) $\qquad (I - \lambda T)\, u = u_o$

gilt: $u \notin \partial G$.

In gleicher Weise wie vorher ist (17) äquivalent zu

$$(18)\qquad \begin{array}{lll} \Delta s = -\lambda\tilde{f} & & s = s_o \\ \Delta p - (p-p_o) = \lambda(\tilde{f} - (p-p_o)) & & \frac{\partial p}{\partial n} = -\lambda\tilde{g} \end{array} \quad \text{auf } \partial\Omega$$

oder

$$(18)\qquad \begin{array}{lll} \Delta s + \lambda\tilde{f} = 0 & & s = s_o \\ \Delta p - (1-\lambda)(p-p_o) - \lambda\tilde{f} = 0 & & \frac{\partial p}{\partial n} = -\lambda\tilde{g} \end{array} \quad \text{auf } \partial\Omega$$

Man kann nun nachrechnen, daß das Rechteck R auch bezüglich des Gleichungssystems (18) die Invarianzbedingungen (11) erfüllt. Dies liegt natürlich an der Wahl von p_o. Es ist nämlich für $s=\underline{s}$ $\lambda\tilde{f}(\underline{s},p,K) \geq \lambda\tilde{f}(\underline{s},\underline{p},K)=0$ und für $s=\bar{s}$ $\lambda\tilde{f}(\bar{s},p,K) \leq \lambda\tilde{f}(\bar{s},\bar{p},K) = 0$.

Entsprechend ist für $p=\underline{p}$

$-(1-\lambda)(\underline{p}-p_o)-\lambda\tilde{f}(s,\underline{p},K) \geq -(1-\lambda)(\underline{p}-\underline{p})-\lambda\tilde{f}(\underline{s},\underline{p},K) = 0$,

$-\lambda\tilde{g}(s,\underline{p},K) \geq -\lambda\tilde{g}(\underline{s},\underline{p},K) \geq 0$, und für $p=\bar{p}$

$-(1-\lambda)(\bar{p}-p_o)-\lambda\tilde{f}(s,\bar{p},K) \leq 0$, $-\lambda\tilde{g}(s,\bar{p},K) \leq 0$.

Nun besteht der Rand von G gerade aus den Funktionen, deren Werte in R liegen und die mindestens einen Wert auf ∂R annehmen, oder

$$\partial G = \{ u \in C(\Omega,\mathbb{R}^2) \mid u(x)\in R \ \forall x\in\bar{\Omega} \text{ und } \exists y\in\bar{\Omega}: u(y)\in\partial R\} ,$$

denn eine Funktion u ist offenbar genau dann Häufungspunkt von G, wenn sie alle Werte in R annimmt; G selbst ist offen, da aus der Kompaktheit von $\bar{\Omega}$ folgt, daß $\inf \{|u(x)-v| \mid x\in\bar{\Omega},\ v\in\partial R\} > 0$ für alle $u\in G$ (vgl. auch Lemma 5 in [23]).
Wenn $u=(s,p)$ eine Lösung aus G ist, dann gelten wegen Lemma 1 die folgenden Implikationen:

a) $x_o\in\Omega,\ \left.\begin{array}{l} s(x_o)=\bar{s} \Rightarrow s\equiv\bar{s} \\ s(x_o)=\underline{s} \Rightarrow s\equiv\underline{s} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\tilde{f} \equiv 0$

b) $x_o\in\Omega,\ \begin{array}{l} p(x_o)=\bar{p} \Rightarrow p\equiv\bar{p} \Rightarrow 0 \leq \lambda\tilde{f} = -(1-\lambda)(\bar{p}-p_o) \leq 0 \\ p(x_o)=\underline{p} \Rightarrow p\equiv\underline{p} \Rightarrow 0 \geq \lambda\tilde{f} = -(1-\lambda)(\underline{p}-p_o) \geq 0 \end{array}$ (11), (18)

daraus folgt in beiden Fällen: $\lambda\tilde{f} \equiv 0$, $\lambda\tilde{g} \equiv 0$ und $(1-\lambda)(p_o-\bar{p}) = 0$ oder $(1-\lambda)(p_o-\underline{p}) = 0$.

c) $x_o\in\partial\Omega,\ p(x_o)=\bar{p},\ p\neq\text{const} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial n}(x_o)>0 \Rightarrow \lambda\tilde{g}(s(x_o),\bar{p},K)<0$

$p(x_o)=\underline{p},\ \underline{p}\neq\text{const} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial n}(x_o)<0 \Rightarrow \lambda g(s(x_o),\underline{p},K)>0$

In beiden Fällen folgt $\lambda > 0$.

Ist u eine Lösung aus G, so muß wegen
$\underline{s} < \inf \{s_o(x) \mid x\in\partial\Omega\} \leq \sup \{s_o(x) \mid x\in\partial\Omega\} < \bar{s}$
einer der Fälle a),b) oder c) auftreten.
Im Fall a) steht wieder $s\equiv\bar{s}$ bzw. $s\equiv\underline{s}$ im Widerspruch zur Wahl von $\bar{s}$ und $\underline{s}$.
Der Fall b) liefert für $\lambda<1$: $p_o=\bar{p}$ oder $p_o=\underline{p}$, was im Widerspruch zur Wahl von p_o steht; für $\lambda=1$ folgt $\tilde{f} \equiv 0$ und wegen der strengen Monotonie von $\tilde{f}$ ist dann auch $s\equiv\bar{s}$ oder $s\equiv\underline{s}$, was zum Widerspruch führt.
Im Fall c) ergibt sich wegen $\lambda>0$ ein Widerspruch zur Invarianzbedingung $\tilde{g}(\bar{s},\bar{p},K) \geq 0$ bzw. $\tilde{g}(\underline{s},\underline{p},K) \leq 0$.

Damit ist gezeigt, daß es keine Lösung in ∂G gibt. Im Falle $\lambda=0$ lautet die Gleichung (17) $u=u_o$, wobei u_o aus dem linearen Problem

$$\begin{array}{ll} \Delta s = 0 & s = s_o \\ \Delta p - (p-p_o) = 0 & \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \end{array} \quad \text{auf } \partial\Omega$$

bestimmt wurde, es war nämlich $u_o = (R_D s_o, p_o)$, und aus dem Maximumprinzip folgt $\underline{s} < (R_D s_o)(x) < \bar{s}$ für alle $x\in\bar{\Omega}$; wegen $\underline{p} < p_o < \bar{p}$ ist $u_o \in G$ und daher $\deg(I,G,u_o) = 1$. Aus der Homotopieinvarianz folgt deshalb $\deg(I-T,G,u_o) = 1$. Daher hat die Gleichung (16) eine Lösung in G, oder äquivalent dazu: Das Gleichungssystem (3) hat eine Lösung in $C(\bar{\Omega})$, deren Werte ganz in $(\underline{s},\bar{s})\times(\underline{p},\bar{p})$ liegen.

Zum Schluß soll noch die Voraussetzung $\underline{s} < s_o(x) < \bar{s}$ für alle $x\in\partial\Omega$ eliminiert werden; es wird gezeigt, daß auch im Falle $\underline{s} \leq s_o(x) \leq \bar{s}$ $\forall x\in\partial\Omega$ eine Lösung in R existiert, sofern die übrigen Voraussetzungen erfüllt sind. Wenn s_o konstant ist, so kann man $\underline{s} = \bar{s} = s_o$ wählen, da nach (12) in diesem Falle $\tilde{g}(s_o,h(s_o,K),K) = 0$ gelten muß, so daß die konstante Funktion $(s,p) = (s_o,h(s_o,K))$ eine Lösung ist. Wenn s_o nicht konstant ist, so folgt aus der Bedingung (9) stets $\underline{s}<\bar{s}$. Man wähle dann eine Folge von Funktionen $s_o^i \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$, die s_o in $C^{2+\alpha}$ approximiert und für die gilt $\underline{s} < s_o^i(x) < \bar{s}$ für alle $x\in\partial\Omega$ und $i\in\mathbb{N}$. Dann gibt es zu jedem $i\in\mathbb{N}$ eine Lösung u^i von (14) bzw. (16) in $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, deren Werte ganz in $\mathring{R}$ liegen. Die Lösungen u^i sind also gleichmäßig beschränkt in $C(\bar{\Omega})$. Daher sind auch die Funktionen

$x \to \tilde{f}(s^i(x),p^i(x),K)$ und $x \to \tilde{g}(s_o^i(x),p^i(x),K)$

beschränkt in $C(\bar{\Omega})$ beziehungsweise in $C(\partial\Omega)$, und aus der Kompaktheit der Greenschen Operatoren und der

Randoperatoren folgt, daß die Menge $\{u^i \mid i\in\mathbb{N}\}$ kompakt in $C(\bar\Omega)$ ist. Es gibt also eine konvergente Teilfolge $(u^{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$, die in $C(\bar\Omega)$ gegen $u^o\in C(\bar\Omega)$ konvergiert. Die Werte von u^o liegen dann in R, daher ist u^o in $\bar G$; außerdem erfüllt u^o die Integralgleichung $(I-T)u^o = u_o$, da der Operator T stetig auf $C(\bar\Omega)$ ist. □

Im nächsten Schritt wird gezeigt, daß zu jedem $K\geq 0$ höchstens eine nichtnegative Lösung von (2) existiert mit $c+p = K$, und daß der "richtige" Parameter $C = \int_\Omega(\alpha c(x)+\beta p(x))dx$ streng monoton und stetig von K abhängt. Die Monotonievoraussetzungen an f und g sind dabei wesentlich. Im Fall (2a) sind weitere Voraussetzungen erforderlich (vgl. Lemma 4).

3.3 Lemma

Es seien die Voraussetzungen (4) und (5) erfüllt. Das Gleichungssystem (2) habe zwei nichtnegative Lösungen (s^1,c^1,p^1) und (s^2,c^2,p^2) mit $c^1+p^1=K^1$, $c^2+p^2=K^2$. Wenn $K^1 \geq K^2$ ist, so gilt $p^1 \geq p^2$, $c^1 \geq c^2$, $p^1+s^1 \geq p^2+s^2$ und $c^1-s^1 \geq c^2-s^2$.

Beweis: Es sei $\bar K := K^2-K^1$, $\bar s := s^2-s^1$, $\bar c := c^2-c^1$, $\bar p := p^2-p^1$. Für $\bar s$ und $\bar p$ gilt dann das folgende System von gekoppelten Randwertaufgaben:

$$\Delta\bar s + f(s^2,c^2,p^2) - f(s^1,c^1,p^1) = 0$$

$$\Delta\bar p - f(s^2,c^2,p^2) + f(s^1,c^1,p^1) = 0$$

$$\bar s = 0,\ \frac{\partial\bar p}{\partial n} = -g(s^2,c^2,p^2) + g(s^1,c^1,p^1) \quad \text{auf } \partial\Omega$$

Durch Einführung der harmonischen Funktion $\bar{v} = \bar{s} + \bar{p}$ erhält man nach Elimination von $\bar{s}$

$$\begin{aligned} &\Delta\bar{p} - f(s^1+\bar{v}-\bar{p},c^1+\bar{K}-\bar{p},p^1+\bar{p}) + f(s^1,c^1,p^1) = 0 \\ &\Delta\bar{v} = 0 \\ &\bar{v} = \bar{p} \\ &\frac{\partial\bar{p}}{\partial n} = -\, g(s^1+\bar{v}-\bar{p},c^1+\bar{K}-\bar{p},p^1+\bar{p}) + g(s^1,c^1,p^1) \end{aligned} \Big\} \text{auf } \partial\Omega \tag{19}$$

Aus diesem Gleichungssystem soll nun hergeleitet werden, daß $\bar{v}$ und $\bar{p}$ überall dasselbe Vorzeichen haben wie $\bar{K}$. OBdA sei $\bar{K} \leq 0$, d.h. $K^2 \leq K^1$.
Angenommen, $\bar{p}$ nehme ein positives Maximum in einem Punkt $x_o \in \bar{\Omega}$ an. Liegt x_o im Innern, so gilt

$$\begin{aligned} 0 \geq \Delta\bar{p}(x_o) &= f(s^1+\bar{v}-\bar{p},c^1+\bar{K}-\bar{p},p^1+\bar{p}) - f(s^1,c^1,p^1) \\ &= \frac{\partial f}{\partial s}(\eta)(\bar{v}-\bar{p}) + \frac{\partial f}{\partial c}(\eta)(\bar{K}-\bar{p}) + \frac{\partial f}{\partial p}(\eta)\bar{p} \end{aligned}$$

mit $\eta = (s^1+\theta(\bar{v}-\bar{p}),c^1+\theta(\bar{K}-\bar{p}),p^1+\theta\bar{p})$ für ein geeignetes $\theta \in (0,1)$. Daher ist

$$\begin{aligned} 0 < (\frac{\partial f}{\partial p}(\eta) - \frac{\partial f}{\partial c}(\eta) + |\frac{\partial f}{\partial s}(\eta)|)\bar{p}(x_o) &\leq |\frac{\partial f}{\partial s}(\eta)|\bar{v}(x_o) \\ &\quad + |\frac{\partial f}{\partial c}(\eta)|\bar{K} \\ &\leq |\frac{\partial f}{\partial s}(\eta)|\bar{v}(x_o) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{p}(x_o) \leq \frac{|\frac{\partial f}{\partial s}(\eta)|\bar{v}(x_o)}{\frac{\partial f}{\partial p}(\eta) - \frac{\partial f}{\partial c}(\eta) + |\frac{\partial f}{\partial s}(\eta)|}$$

$$< \bar{v}(x_o), \quad \text{da } \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial c} > 0, |\frac{\partial f}{\partial s}|\bar{v}(x_o) > 0 \tag{20}$$

$$\leq \max\{\bar{v}(x) \mid x \in \partial\Omega\}, \text{ da } \bar{v} \text{ harmonisch}$$

$$= \max\{\bar{p}(x) \mid x \in \partial\Omega\} \tag{21}$$

im Widerspruch zur Annahme, daß $\bar{p}$ sein Maximum in x_o annehmen sollte.
Daher kann x_o nur auf $\partial\Omega$ liegen. In x_o ist aber

$$f(s^1+\bar{v}-\bar{p},c^1+\bar{K}-\bar{p},\bar{p}+p^1) - f(s^1,c^1,p^1)$$

$$= f(s_o,c^1+\bar{K}-\bar{p},p^1+\bar{p}) - f(s_o,c^1,p^1)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial c}(\eta)\ \bar{K} + (\frac{\partial f}{\partial p}(\eta) - \frac{\partial f}{\partial c}(\eta))\bar{p}(x_o) > 0 \quad \Rightarrow$$

(22) $f(s^1+\bar{v}-\bar{p},c^1+\bar{K}-\bar{p},p^1+\bar{p}) > f(s^1,c^1,p^1)$ in einer Umgebung U von x_o.

Daher ist auf $U\cap\Omega$ $\Delta\bar{p} > 0$, und $\bar{p}$ nimmt sein Maximum in $x_o \in \partial(U\cap\Omega)$ an. Aus dem Maximumprinzip folgt nun wieder

$$0 < \frac{\partial\bar{p}}{\partial n}(x_o) = - g(s_o,c^1+\bar{K}-\bar{p},p^1+\bar{p}) + g(s_o,c^1,p^1)$$

(23) ≤ 0 wegen $\bar{p}(x_o)>0$, $\bar{K}\leq 0$ und der Monotonievoraussetzungen für g.

Die Annahme: $\exists x_o\in\Omega$ mit $\bar{p}(x_o)>0$ führt also zum Widerspruch. Daher ist $\bar{p}\leq 0$. Auf $\partial\Omega$ ist $\bar{v}=\bar{p}\leq 0$, daher $\bar{v}\leq 0$ auf $\bar{\Omega}$, da $\bar{v}$ harmonisch.

Um zu zeigen, daß für $\bar{K}\leq 0$ auch $\bar{c}\leq 0$ gilt, führt man analog die harmonische Funktion $\bar{w} := \bar{c}-\bar{s}$ ein und leitet ein Gleichungssystem her, das (19) entspricht

$$\Delta\bar{c} + f(s^1+\bar{c}-\bar{w},c^1+\bar{c},p^1+\bar{K}-\bar{c}) - f(s^1,c^1,p^1) = 0$$

(24)
$$\left.\begin{aligned} \Delta\bar{w} &= 0 \\ \bar{w} &= \bar{c} \\ \frac{\partial\bar{c}}{\partial n} &= g(s^1+\bar{c}-\bar{w},c^1+\bar{c},p^1+\bar{K}-\bar{c}) - g(s^1,c^1,p^1) \end{aligned}\right\} \text{auf } \partial\Omega$$

Wäre nun $\bar{c}(x_o)>0$ maximal in einem Punkt $x_o\in\Omega$, so wäre

$$0 \geq \Delta\bar{c}(x_o) = - \frac{\partial f}{\partial s}(\eta)(\bar{c}(x_o)-\bar{w}(x_o)) - \frac{\partial f}{\partial c}(\eta)\bar{c}(x_o) - \frac{\partial f}{\partial p}(\eta)(\bar{K}-\bar{c}(x_o))$$

$$\Rightarrow 0 < (\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial c} + |\frac{\partial f}{\partial s}|)\bar{c}(x_o) \leq |\frac{\partial f}{\partial s}|\bar{w}(x_o) + \frac{\partial f}{\partial p}\ \bar{K} \leq |\frac{\partial f}{\partial s}|\bar{w}(x_o)$$

$$\Rightarrow \bar{c}(x_o) < \bar{w}(x_o) \leq \max\{\bar{w}(x) \mid x\in\partial\Omega\} = \max\{\bar{c}(x) \mid x\in\partial\Omega\}$$ im Widerspruch zur Maximalität von $\bar{c}$ in x_o.

Wäre $\bar{c}(x_o)>0$ maximal in $x_o \in \partial\Omega$, so schließt man wie früher $\Delta\bar{c}>0$ in einer geeigneten Umgebung; hieraus folgt $\frac{\partial \bar{c}}{\partial n}(x_o) > 0$, was zu einem Widerspruch zu den Randbedingungen führt. Also ist $\bar{c} \leqq 0$. Als Nebenergebnis erhält man auch wieder $\bar{w} \leqq 0$. ⌟

Für den Fall der anderen Randbedingungen an s im Fall (2a) braucht man weitere Monotonievoraussetzungen:

$$\frac{\partial g}{\partial s} \leqq 0 \quad \text{für } s \geqq 0,\ c \geqq 0,\ p \geqq 0$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial p} \leqq 0,\ \frac{\partial g_1}{\partial c} \geqq 0,\ \frac{\partial g_1}{\partial s} < 0 \quad \text{für } s>0, c>0, p>0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial s} + \frac{\partial g_1}{\partial c} - \frac{\partial g_1}{\partial p} \leqq 0 \quad \text{für } s \geqq 0,\ c \geqq 0,\ p \geqq 0$$

3.4 Lemma

Unter den zusätzlichen Voraussetzungen (25) kann die Aussage von Lemma 3 auf die Randwertaufgabe (2a) übertragen werden.

Beweis: Der Beweis von Lemma 3 muß an den Stellen modifiziert werden, an denen infolge der Dirichletrandbedingungen für s die Randbedingung $\bar{v}=\bar{p}$ bzw. $\bar{w}=\bar{c}$ ausgenutzt wird. Die Randbedingung für $\bar{v}$ in (19) wird ersetzt durch

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial n} = g_1(s^1+\bar{v}-\bar{p}, c^1+\bar{K}-\bar{p}, p^1+\bar{p}) - g_1(s^1, c^1, p^1) .$$

Es sei wieder $\bar{K} \leqq 0$. Unter der Annahme, daß $\bar{p}$ in $x_o \in \Omega$ ein positives Maximum annimmt, kann man den Schluß (20) übernehmen:

$$\bar{p}(x_o) < \bar{v}(x_o) \leqq \max\{\bar{v}(x) \mid x \in \partial\Omega\} = \bar{v}(x_1) ,$$

wobei $\bar{v}$ in $x_1 \in \partial\Omega$ sein Maximum annehme.
Der Schluß (21) wird durch die folgende Überlegung ersetzt:

$$0 \leq \frac{\partial \bar{v}}{\partial n}(x_1) = \frac{\partial g_1}{\partial s}(\eta)\bar{v}(x_1) + \frac{\partial g_1}{\partial c}(\eta)\,\bar{K}$$

$$+ \left(\frac{\partial g_1}{\partial p} - \frac{\partial g_1}{\partial c} - \frac{\partial g_1}{\partial s}\right)(\eta)\bar{p}(x_1) \tag{26}$$

an einer geeigneten Stelle auf der Strecke zwischen $(s^1,c^1,p^1)(x_1)$ und $(s^2,c^2,p^2)(x_1)$

$$< \left(\frac{\partial g_1}{\partial p}(\eta) - \frac{\partial g_1}{\partial c}(\eta) - \frac{\partial g_1}{\partial s}(\eta)\right)\bar{p}(x_1)$$

Daher ist $\bar{p}(x_1) > 0$, so daß man aus (26) erhält

$$0 \leq \frac{\partial g_1}{\partial s}(\bar{v}(x_1) - \bar{p}(x_1)) \text{ , woraus sich wegen } \frac{\partial g_1}{\partial s} < 0$$

$$\bar{v}(x_1) \leq \bar{p}(x_1) \quad \text{schließen läßt.} \tag{27}$$

Also gilt $\bar{p}(x_o) < \bar{v}(x_o) \leq \bar{v}(x_1) \leq \bar{p}(x_1)$ im Widerspruch zur Annahme, daß $\bar{p}$ in x_o sein Maximum annehmen sollte. Sei also $x_o \in \partial\Omega$. Dann ist $\bar{p}(x_o) \geq \bar{v}(x_o)$, andernfall wäre nämlich nach (27)

$\bar{p}(x_o) < \bar{v}(x_o) \leq \bar{v}(x_1) \leq \bar{p}(x_1)$.

In x_o gilt analog zu (22)

$$f(s^1+\bar{v}-\bar{p}, c^1+\bar{K}-\bar{p}, p^1+\bar{p}) - f(s^1,c^1,p^1)$$

$$= \left|\frac{\partial f}{\partial s}(\eta)\right|(\bar{p}(x_o)-\bar{v}(x_o)) + \left|\frac{\partial f}{\partial c}(\eta)\right||\bar{K}|$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial p}(\eta) - \frac{\partial f}{\partial c}(\eta)\right)\bar{p}(x_o)$$

$$> 0 \,, \qquad \text{an geeigneter Stelle } \eta$$

daher ist $\Delta\bar{p} > 0$ in einer Umgebung von x_o $\Rightarrow$

$$0 < \frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(x_o) = \frac{\partial g}{\partial s}(\tilde{\eta})(\bar{p}(x_o)-\bar{v}(x_o)) - \frac{\partial g}{\partial c}(\tilde{\eta})(\bar{K}-\bar{p}(x_o))$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial p}(\tilde{\eta})\bar{p}(x_o)$$

$$\leq 0;$$

daher ist $\bar{p} \leq 0$. Dann ist auch $\bar{v} \leq 0$, da andernfalls

$\bar{w}(x_1) > 0$ und nach (27) auch $\bar{p}(x_1) > 0$.

Analog schließt man $\bar{c} \leqq 0$ und $\bar{w} \leqq 0$. □

Wenn die Voraussetzungen von Lemma 3 bzw. Lemma 4 erfüllt sind, und wenn zwei nichtnegative Lösungen von (2) bzw. (2a) gegeben sind, so folgt für die Differenzfunktionen $\bar{s},\bar{c},\bar{p}$ aus Lemma 3 bzw. Lemma 4
$\bar{K} \leqq \bar{c} \leqq \bar{s} \leqq -\bar{p} \leqq -\bar{K}$ für $\bar{K} \leqq 0$ und
$-\bar{K} \leqq -\bar{p} \leqq \bar{s} \leqq \bar{c} \leqq \bar{K}$ für $\bar{K} \geqq 0$. Insbesondere folgt hieraus die Eindeutigkeit der Lösung zu gegebenem K. Wegen $|\bar{s}|,|\bar{c}|,|\bar{p}| \leqq |\bar{K}|$ hängt die Lösung stetig von K ab. Außerdem sind die Abbildungen $K \to c$, $K \to p$ auf ihrem Definitionsbereich monoton wachsend. Damit ist natürlich auch die Abbildung

$K \to C := \int_\Omega (\alpha c(x)+\beta p(x))dx$ monoton wachsend; sie ist sogar streng monoton, denn falls etwa $\bar{K}<0$ ist, so gilt in jedem Punkt $x \in \Omega$: $\bar{c}(x)<0$ oder $\bar{p}(x)<0 \Rightarrow$ $\alpha\bar{c}(x) + \beta\bar{p}(x) < 0$, da $\alpha,\beta > 0$ und $\bar{c},\bar{p} \leqq 0 \Rightarrow \bar{C} < 0$. Wenn zu jedem $K \geqq 0$ eine Lösung von (2) bzw. (2a) existiert, insbesondere also, wenn die Voraussetzungen von Lemma 2 zu jedem $K \geqq 0$ erfüllt sind, so ist die Abbildung $K \to C$ auf $\mathbb{R}_+$ definiert, streng monoton und stetig. Aus der offensichtlichen Ungleichung
$|\Omega| \min(\alpha,\beta)\, K \leqq C \leqq |\Omega| \max(\alpha,\beta)\, K$ folgt, daß die positive Halbachse auf sich selbst abgebildet wird. Daher existiert die Umkehrfunktion auf $\mathbb{R}_+$, die ebenfalls streng monoton wachsend und stetig ist. Insbesondere existiert dann zu jedem $C \geqq 0$ eine Lösung von (2) bzw. (2a) mit $\int_\Omega (\alpha c(x)+\beta p(x))dx = C$.

Zusammenfassend erhält man den folgenden Satz:

3.5 Satz

Es seien die Voraussetzungen (4),(5) und (6) erfüllt (9) im Falle (2); im Fall (2a)(25). Außerdem gebe es zu jedem $K>0$ ein achsenparalleles Rechteck $R \subset [0,\infty)\times[0,K]$, so daß die Invarianzbedingungen (11) erfüllt werden können. Dann gibt es zu jedem $C\geq 0$ genau eine nichtnegative Lösung von (2) beziehungsweise (2a) mit

$\int_\Omega (\alpha c(x) + \beta p(x))dx = C$. Oder äquivalent dazu: Zu jedem $C\geq 0$ gibt es genau eine nichtnegative stationäre Lösung von (1) mit $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (c(x)+p(x))dx = C$.

Die Funktionen c, p, $D_s s+D_p p$ und $D_c c-D_s s$ hängen monoton und stetig von C ab. Es gilt ferner

$$C \min(D_c,D_p) \leq D_c c + D_p p \leq C \max(D_c,D_p)$$

$$c \leq C \max(1,D_p/D_c)$$

$$p \leq C \max(1,D_c/D_p)$$

$$|s-s^o| \leq C \max(D_c,D_p)/D_s \quad ,$$

wobei s^o die Lösung zu $C=0$ ist.

3.6 Anwendungen

1. Wenn am Rand für s Dirichlet-Randbedingungen und für c und p Neumann-Randbedingungen vorgeschrieben werden, d.h. $s_{|\partial\Omega} = s_o$ und $g=0$, so sichern die Voraussetzungen an f, daß zu $K>0$ ein Rechteck mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert werden kann; die Voraussetzungen von Satz 5 sind also erfüllt. Zu jedem $C\geq 0$ existiert dann endeutig eine stationäre Lösung von (1). Für diese gilt außerdem

$$\underline{s}_o \equiv \inf\{s_o(x) \mid x\in\partial\Omega\} \leq s \leq \sup\{s_o(x) \mid x\in\partial\Omega\} \equiv \bar{s}_o$$

2. Es seien wieder Dirichlet-Randbedingungen für s vorgeschrieben, aber g kann auf dem Rand von $x\in\partial\Omega$, $s = s_o$, c und p abhängen. Eine explizite Abhängigkeit von x ist insbesondere dann eine natürliche Annahme, wenn (wie im Falle einer Membran) der Rand nicht zusammenhängend ist. Wenn es ein $\bar{s} \geq \underline{s}_o$ gibt mit $(f(\bar{s},c,p)=0 \Rightarrow g(x,\bar{s},c,p)\geq 0 \ \forall x\in\partial\Omega)$ für alle $c,p \geq 0$, so gibt es zu jedem $K>0$ ein invariantes Rechteck der Form $[0,\bar{s}]\times[0,h(\bar{s},K)]$, und die Voraussetzungen von Satz 5 sind erfüllt. Ist zum Beispiel $f(s,c,p) = \bar{k}p - ksc$ und $g(x,s,c,p) = \bar{a}(x)p - a(x)sc$, so lautet die Bedingung: $\bar{a}(x)/a(x) \geq \bar{k}/k$ für alle $x\in\partial\Omega$, d.h. die Affinität muß am Rand größer sein als im Innern.

3. Es sei wieder $f(s,c,p) = \bar{k}p - ksc$; dann ist $h(s,K) = Ks/(\bar{k}/k+s)$. Die Randbedingungen lauten

$$D_s \frac{\partial s}{\partial n} = b(s_o - s) + \bar{a}p - asc$$

$$D_c \frac{\partial c}{\partial n} = -D_p \frac{\partial p}{\partial n} = \bar{a}p - asc + \bar{a}_1 p - a_1 s_o c$$

Dies kann als ein System interpretiert werden, bei dem der Carrier sich sowohl mit dem Substrat innerhalb als auch außerhalb eines Gebietes (z.B. einer Membran) verbinden kann. a, $\bar{a}$, a_1, $\bar{a}_1$ und b dürfen explizit von $x\in\partial\Omega$ abhängen. Mit den früheren Bezeichnungen ist in diesem Fall

$$g(x,s_o,s,c,p) = (\bar{a}(x)+\bar{a}_1(x))p - (a(x)s+a_1(x)s_o)c$$

$$g_1(x,s_o,s,c,p) = b(x)(s_o - s) - \bar{a}_1(x)p + a_1(x)s_o c$$

Die Monotoniebedingungen für g sind erfüllt, und die für g_1 aus (25), falls $b \geq a_1 s_o + \bar{a}_1$, $b>0$, $\bar{a}_1, a_1 \geq 0$. Die Invarianzbedingungen lauten nun am Rand

$$b(\underline{s}_o - \underline{s}) + \bar{a}\underline{p} - a\underline{s}(K-\underline{p}) \quad \geq 0 \geq b(\bar{s}_o - \bar{s}) + \bar{a}p - a\bar{s}(K-\bar{p})$$

$$(\bar{a}+\bar{a}_1)\underline{p} - (a\underline{s}+a_1\underline{s}_o)(K-\underline{p}) \leq 0 \leq (\bar{a}+\bar{a}_1)\bar{p} - (a\bar{s}+a_1\bar{s}_o)(K-\bar{p})$$

oder mit $\underline{p} = h(\underline{s},K)$, $\bar{p} = h(\bar{s},K)$

α) $b(\underline{s}_o-\underline{s}) \geq (a\bar{k}/k - \bar{a})\cdot K\underline{s}/(\bar{k}/k + \underline{s})$

β) $b(\bar{s}_o-\bar{s}) \leq (a\bar{k}/k - \bar{a})\cdot K\bar{s}/(\bar{k}/k + \bar{s})$

γ) $a_1(\bar{k}/k)\underline{s}_o \geq (\bar{a} + \bar{a}_1 - a\bar{k}/k)\cdot \underline{s}$

δ) $a_1(\bar{k}/k)\bar{s}_o \leq (\bar{a} + \bar{a}_1 - a\bar{k}/k)\cdot \bar{s}$

δ) läßt sich nur erfüllen, falls $\bar{a}+\bar{a}_1 \geq a\cdot\bar{k}/k$.

a) $\bar{a}+\bar{a}_1 = a\bar{k}/k$: Dann ist nach δ) $a_1=0$. Damit ist auch γ) erfüllt. α) und β) gelten bei geeigneter Wahl von $\underline{s}$ und $\bar{s}$, z.B. für $\underline{s}=0$ und $\bar{s}\geq\bar{s}_o$.

b) $\bar{a} + \bar{a}_1 > a\bar{k}/k$.
β) und δ) lassen sich für hinreichend großes $\bar{s}$ offensichtlich erfüllen, α) und γ) für hinreichend kleines $\underline{s}$, auf jeden Fall für $\underline{s}=0$.

Schließlich wäre es noch interessant zu untersuchen, inwieweit sich der vorhergehende Beweis auf Systeme mit mehreren Substanzen und mehreren Carriern übertragen läßt. Sei I_s die Anzahl der transportierten Substrate, I_p die Anzahl der Carrier in verschiedenen Zuständen, also die Anzahl der Reaktanden, die den Bereich nicht verlassen können, und $I=I_s+I_p$ die Anzahl der Reaktanden. R sei die Anzahl der Reaktionen (Hin- und Rückreaktion werden nur einfach gezählt), und an jeder Reaktion sei mindestens einer der Carrier p_i beteiligt. E sei die Anzahl der Erhaltungsgrößen im gewöhnlichen Differentialgleichungssystem, und E_p die Anzahl der Erhaltungsgrößen, an denen nur p_i beteiligt sind. Es werden nur die voneinander unabhängigen Erhaltungsgrößen gezählt. Es gibt also E_p Gleichungen $\sum_i m_{ki}p_i = 0$ oder $Mp = 0$, dabei ist der Rang der $E_p \times I_p$-Matrix M E_p. Wenn das

System nicht trivial ist, ist $E_p < I_p$.

Gibt man die Erhaltungsgrößen $K_1,..,K_{E_p}$ vor (z.B. durch die Anfangsbedingungen gegeben), so kommen nur Lösungen mit $Mp = K$ in Frage. Wegen $rg\ M = E_p$ kann man diese Gleichung nach E_p der p_i auflösen und diese aus dem ursprünglichen Gleichungssystem eliminieren.

r_j, $j=1,..R$ seien die Reaktionsterme. Dann heißt das Reaktionssystem (ohne Diffusion) $\dot{p}_i = \sum_j n_{ij} r_j$ oder $\dot{p} = Nr$, wobei N eine $I_p \times R$-Matrix ist. Die Zeilenvektoren von M spannen den Vektorraum der I_p-Vektoren auf, die senkrecht auf den $\dot{p}$ stehen:

$M\dot{p} = O\ \forall \dot{p} \Rightarrow MNr = O\ \forall r \Rightarrow MN = O$, und M war maximal mit dieser Eigenschaft. Daher ist $rg\ M + rg\ N = I_p$, also $rg\ N = I_p - rg\ M = I_p - E_p$. Falls zusätzlich gilt: $\dot{p}=O \Rightarrow r=O$, so ist $\ker N = \{O\} \Rightarrow rg\ N = R - \dim(\ker N) = R$ $\Rightarrow E_p + R = I_p$. Nach der Elimination bleiben dann nur noch so viele Reaktanden übrig, die den Bereich nicht verlassen können, wie es Reaktionen gibt.

Es müssen dann für die s_i und die übrigen p_i invariante Mengen gefunden werden, abhängig von dem Vektor der Erhaltungsgrößen K. Diese Mengen im Phasenraum müssen nicht unbedingt Quader sein. Sind unter den s_i und p_i jeweils die Randbedingungen gleichartig, so reicht es, im Phasenraum Mengen der Form $C_s \times C_p$ zu betrachten, wobei die $C_s \subset \mathbb{R}^{I_s}$ und $C_p \subset \mathbb{R}^{I_p}$ jeweils konvex und beschränkt sind. Die Invarianzbedingungen heißen dann entsprechend, daß die jeweiligen Vektorfelder nicht aus $C_s \times C_p$ herauszeigen dürfen [75]. Um diese Bedingungen erfüllen zu können, braucht man jedoch Voraussetzungen an die $\tilde{f}$. Sucht man nach invarianten Quadern, so dürfen die $\tilde{f}_i$ nicht von allen Variablen abhängen, insbesondere dürfen die $\tilde{f}_{p_i}$ von den anderen p_j nicht abhängen.

Dies ist eine Art "Nichtkopplungsbedingung". Sie wird wird von dem folgenden System "zwei Carrier für ein Substrat" erfüllt

$$\dot{c}_1 - D_{c_1}\Delta c_1 = -(\dot{p}_1 - D_{p_1}\Delta p_1) = \bar{k}_1 p_1 - k_1 s c_1$$
$$\dot{c}_2 - D_{c_2}\Delta c_2 = -(\dot{p}_2 - D_{p_2}\Delta p_2) = \bar{k}_2 p_2 - k_2 s p_2$$
$$\dot{s} - D_s \Delta s = \bar{k}_1 p_1 + \bar{k}_2 p_2 - k_1 s c_1 - k_2 s c_2$$

Diese System hat zwei Erhaltungsgrößen und dementsprechend zwei räumliche Konstanten im stationären System $K_1 = D_{c_1} c_1 + D_{p_1} p_1$ und $K_2 = D_{c_2} c_2 + D_{p_2} p_2$.
Es können also c_1 und c_2 eliminiert werden, und bei geeigneten Randbedingungen gibt es invariante Quader der Form $[\underline{s},\bar{s}]\times[\underline{p}_1,\bar{p}_1]\times[\underline{p}_2,\bar{p}_2]$.

Ein Beispiel für einen Prozeß ohne die Nichtkopplungseigenschaft ist das System "zwei Substrate benutzen einen Carrier":

$$\dot{s}_1 - D_{s_1}\Delta s_1 = -(\dot{p}_1 - D_{p_1}\Delta p_1) = \bar{k}_1 p_1 - k_1 s_1 c$$
$$\dot{s}_2 - D_{s_2}\Delta s_2 = -(\dot{p}_2 - D_{p_2}\Delta p_2) = \bar{k}_2 p_2 - k_2 s_2 c$$
$$\dot{c} - D_c \Delta c = \bar{k}_1 p_1 + \bar{k}_2 p_2 - k_1 s_1 c - k_2 s_2 c$$

Hier gibt es nur eine Erhaltungsgröße, man kann also etwa c eliminieren. Das verbleibende Gleichungssystem besitzt keine invarianten Quader.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] R.A. Adams
Sobolev Spaces
New York, London, 1975

[2] H. Amann
Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces
SIAM Review 18, 620-709 (1976)

[3] H. Amann
Nonlinear Elliptic Equations with Nonlinear Boundary Conditions
in: W. Eckhaus (ed.), Proc. second Scheveningen Conference on Differential Equations.
Amsterdam 1976

[4] R. Ansorge
Differenzenapproximationen partieller Anfangswertaufgaben
Stuttgart 1978

[5] C.M. Armstrong
Potassium Pores of Nerve and Muscle Membranes
in: G. Eisenman (ed.) Membranes: A Series of Advances. Vol. 3
New York 1975

[6] E. Bamberg, H.-J. Apell, H. Alpes, E. Gross, J.L. Morell, J.F. Harbaugh, K. Janko, P. Läuger
Ion Channels Formed by Chemical Analogs of Gramicidin A
Federation Proceedings 37, S. 2633 (1978)

[7] Z. Barak, C. Gilvarg
Peptide Transport
in: H. Eisenberg, E. Katchalski-Katzir, L.A. Manson (ed.) Biomembranes, Vol. 7
New York 1975

[8] R.A. Capaldi (ed.)
Membrane Proteins and their Interaction with Lipids
New York 1977

[9] R. Courant, D. Hilbert
Methoden der Mathematischen Physik II
2. Auflage
Berlin Heidelberg New York 1968

[10] J. Crank
The Mathematics of Diffusion
Oxford 1956

[11] K. Deimling
Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade
Berlin Heidelberg 1974

[12] L.F. Del Castillo, E.A. Mason, L.A. Viehland
Energy Barrier Models for Membrane Transport
Biophys. Chem. 9, 111-120 (1979)

[13] M. Davies
Functions of Biological Membranes
London 1973

[14] J.T. Davies, E.K. Rideal
Interfacial Phenomena
New York 1961

[15] H. Davson, J.F. Danielli
The Permeability of Natural Membranes
Cambridge 1943

[16] W. Eckhaus
Asymptotic Analysis of Singular Perturbations
Amsterdam 1979

[17] A. Friedman
Partial Differential Equations
New York Chicago San Francisco 1969

[18] A. Friedman
Partial Differential Equations of Parabolic Type
Englewood Cliffs, N.J. 1964

[19] P. Geck
Eigenschaften eines asymmetrischen Carrier-Modells für den Zuckertransport an menschlichen Erythrozyten
Biochim. Biophys. Acta 241, 462-472 (1971)

[20] D. Gilbarg, N.S. Trudinger
Elliptic Partial Differential Equations of Second Order
Berlin Heidelberg New York 1977

[21] S. Glasstone, K.J. Laidler, H. Eyring
The Theory of Rate Processes
New York 1961

[22] E. Grell, T. Funck, F. Eggers
Structure and Dynamic Properties of Ion-Specific Antibiotics
in: G. Eisenman (ed.) Membranes: A Series of Advances, Vol. 3
New York 1975

[23] K.P. Hadeler, F. Rothe, H. Vogt
Stationary Solutions of Reaction-Diffusion Equations
Math. Meth. in the Appl. Sci. 1, 418-431 (1979)

[24] K. Heckmann
Single File Diffusion
in: F. Kreuzer, J.F.G Slegers (ed.) Biomembranes Vol. 3
New York London 1972

[25] K. Heckmann
Zur Theorie der "Single-File"-Diffusion
Z. Phys. Chem. Neue Folge 44(1965), 46(1965), 58(1968), 71(1970)

[26] D. Henry
Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations
Springer Lecture Notes 840
Berlin Heidelberg New York 1981

[27] B. Hille
Rate Theory Models for Ion Flow in Ionic Channels of Nerve and Muscle
in: C.F. Stevens, R.W. Tsien (ed.) Membrane Transport Processes, Vol 3
New York 1979

[28] E. Hille, R.S. Phillips
Functional Analysis and Semi-Groups
Providence, R.I. 1957

[29] S.B. Hladky, D.A. Haydon
Ion Transfer Across Lipid Membranes in the Presence of Gramicidin A
Biochim. Biophys. Acta 274, 294-312 (1972)

[30] D.G. Hoare
A New Kinetic Analysis of the Leucine Transport Carrier in Erythrocytes
in: F. Kreuzer, J.F.G. Slegers (ed.) Biomembranes, Vol. 3
New York London 1972

[31] A.L. Hodgkin, R.D. Keynes
The Potassium Permeability of a Giant Nerve Fibre
J. Physiol. 128, 61-88 (1955)

[32] G.D. Holman
An Allosteric Pore Model fo Sugar Transport in Human Erythrocytes
Biochim. Biophys. Acta 599, 202-213 (1980)

[33] M. Höfer
Transport durch biologische Membranen
Weinheim 1977

[34] J.A. Jacquez, H. Kutchai, E. Daniels
Hemoglobin-Facilitated Diffusion of Oxygen: Interfacial and Thickness Effects
Resp. Phys. 15, 166-181 (1972)

[35] H. Kielhöfer
Global Solutions of Semilinear Evolution Equations Satisfying an Energy Inequality
J. Diff. Equ. 36, 188-222 (1980)

[36] M.A. Krasnosel'skii
Positive Solutions of Operator Equations
Groningen 1964

[37] F. Kreuzer, L.J.C. Hoofd
Facilitated Diffusion in the Presence of Hemoglobin
Resp. Phys. 8, 280-302 (1970)

[38] F. Kreuzer, L.J.C. Hoofd
Factors Influencing Facilitated Diffusion of Oxygen in the Presence of Hemoglobin and Myoglobin
Resp. Phys. 15, 104-124 (1972)

[39] H. Kutchai, J.A. Jacquez, F.J. Mather
Nonequilibrium Facilitated Oxygen Transport in Hemoglobin Solutions
Biophys. J. 10, 38-54 (1970)

[40] O.A. Ladyżenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva
Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type
Transl. of Math. Monographs 23 Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1968

[41] R.C. LaForce
Steady-State Diffusion in the Carbon Monoxide + Oxygen + Hemoglobin System
Trans. Faraday Soc. 62, 1458-1468 (1966)

[42] R. Laprade, S. Ciani, G. Eisenman, G. Szabo
The Kinetics of Carrier- Mediated Ion Permeation in Lipid Bilayers and its Theoretical Interpretation
in: G. Eisenman (ed.) Membranes: A Series of Advances, Vol. 3
New York 1975

[43] W.R. Lieb, W.D. Stein
Quantitative Predictions of a Noncarrier Model for Glucose Transport Across the Human Red Cell Membrane
Biophys. J. 10, 585-609 (1970)

[44] E.C.C. Lin
The Molecular Basis of Membrane Transport Systems
in: L.I. Rothfield (ed.) Structure and Function of Biological Membranes
New York 1971

[45] W.R. Loewenstein, Y. Kanno, S.J. Socolar
The Cell to Cell Channel
in: Federation Proceedings 37, 2645-2650 (1978)

[46] M. Mochizuki, R.E. Forster
Diffusion of Carbon Monoxide Through Thin Layers of Hemoglobin Solutions
Science 138, 897-898 (1962)

[47] J.D. Murray
On the Molecular Mechanism of Facilitated Oxygen Diffusion by Hemoglobin and Myoglobin
Proc. R. Soc. B 178, 95-110 (1971)

[48] J.D. Murray, J. Wyman
Facilitated Diffusion. The Case of Carbon Monoxide
J. Biol. Chem. 246, 5903-5906 (1971)

[49] R.J. Naftalin
A Model for Sugar Transport Across Red Cell Membranes Without Carriers
Biochim. Biophys. Acta 211, 65-78 (1970)

[50] J. Nedelman, S.I. Rubinow
Facilitated Diffusion of Oxygen and Carbon Monoxide in the Large Affinity Regime
J. Math. Biol. 12, 73-90 (1981)

[51] B. Neumcke, E. Bamberg
The Action of Uncouplers in Lipid Bilayer Membranes
in: G. Eisenman (ed.) Membranes: A Series of Advances, Vol. 3
New York 1975

[52] Y.A. Ovchinnikov
Physico-Chemical Basis of Ion Transport Through Biological Membranes: Ionophores and Ion Channels
Eur. J. Biochem. 94, 321-336 (1979)

[53] W. Pogorzelski
Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique
Ricerche di Matematica 5, 25-57 (1956)

[54] W. Pogorzelski
Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale
Ann. Polon. Math. 4, 61-92 (1957)

[55] M.H. Protter, H.F. Weinberger
Maximum Principles in Differential Equations
Englewood Cliffs, N.J. 1967

[56] M. Reed, B. Simon
Methods of Modern Mathematical Physics, Vol.2: Fourier Analysis, Self-Adjointness
New York 1975

[57] V. Riveros-Moreno, J.B. Wittenberg
The Self-Diffusion Coefficients of Myoglobin and Hemoglobin in Concentrated Solutions
J. Biol. Chem. 247, 895-901 (1972)

[58] F. Rothe
Solutions for Systems of Nonlinear Elliptic Equations with Nonlinear Boundary Conditions
Math. Meth. in the Appl. Sci. 1, 545-553 (1979)

[59] F. Rothe
Uniform Bounds from Bounded L^p-Functionals in Reaction-Diffusion Equations
J. Diff. Equ. 45, 207-233 (1982)

[60] F. Rothe
A priori Estimates, Global Existence and Asymptotic Behavior for Weakly Coupled Parabolic Systems of Reaction-Diffusion Equations
erscheint demnächst

[61] L.I. Rothfield (ed.)
Structure and Function of Biological Membranes
New York 1971

[62] S.I. Rubinow, M. Dembo
The Facilitated Diffusion of Oxygen by Hemoglobin and Myoglobin
Biophys. J. 18, 29-42(1977)

[63] P.F. Scholander
Oxygen Transport Through Hemoglobin Solutions
Science 131, 585-590 (1960)

[64] J.S. Schultz, J.D. Goddard, S.R. Suchdeo
Facilitated Transport via Carrier-Mediated Diffusion
AICHE J. 20, 417-445 (1974)

[65] G. Stark, B. Ketterer, R. Benz, P. Läuger
The Rate Constants of Valinomycin-Mediated Ion Transport Through Thin Lipid Membranes
Biophys. J. 11, 981-994 (1971)

[66] W.D. Stein
The Movement of Molecules Across Cell Membranes
New York 1967

[67] C.F. Stevens
Synaptic Action of Acetylcholin
Federation Proceedings 37, 2651-2653 (1978)

[68] L. Stryer
Biochemistry, Chapter X
San Francisco 1975

[69] D.W. Urry, C.M. Venkatachalam, A. Spisni, P. Läuger, M.A. Khaled
Rate Theory Calculation of Gramicidin Single-Channel Currents Using NMR-Derived Rate Constants
Proc. Natl. Acad. Sci. USA 77, 2028-2032 (1980)

[70] A. Voigt, J. Wloka
Hilberträume und elliptische Differentialoperatoren
Zürich 1975

[71] J.A. Walker
Dynamical Systems and Evolution Equations
New York 1980

[72] G.H. Wannier
Statistical Physics
New York 1966

[73] W.J. Ward
Analytical and Experimental Studies of Facilitated Transport
AICHE J. 16, 405-410 (1970)

[74] T. Ważewski
Sur un méthode topologique de l'examen de l' allure asymptotique des integrals des équation differentielles
Proc. Internat. Congress Math. Vol. III,132-139
Amsterdam 1954

[75] H.F. Weinberger
Invariant Sets for Weakly Coupled Parabolic and Elliptic Systems
Rendiconti di Matematica 8, Serie VI, 295-310 (1975)

[76] W.F. Widdas
Facilitated Transfer of Hexoses Across the Human Erythrocyte Membrane
J. Physiol. 125, S. 163 (1954)

[77] W.F. Widdas
Inability of Diffusion to Account for Placental Glucose Transfer in the Sheep and Consideration of the Kinetics of a Possible Carrier Transfer
J. Physiol. 118, 23-39 (1952)

[78] J.O. Wieth, M.T. Tosteson
Organotin-Mediated Exchange Diffusion of Anions in Human Red Cells
J. Gen. Physiol. 73, 765-788 (1979)

[79] W. Wilbrandt
Carrier Diffusion
in: F. Kreuzer, J.F.G. Slegers (ed.)
Biomembranes, Vol. 3
New York, London 1972

[80] J.B. Wittenberg
The Molecular Mechanism of Hemoglobin-Facilitated Oxygen Diffusion
J. Biol. Chem. 241, 104-114 (1966)

[81] J.B. Wittenberg
Myoglobin-Facilitated Oxygen Diffusion: Role of Myoglobin in Oxygen Entry into Muscle
Physiol. Rev. 50, S. 559 (1970)

[82] J. Wyman
Facilitated Diffusion and the Possible Role of Myoglobin as a Transport Mechanism
J. Biol. Chem. 241, 115-121 (1966)

[83] J.P. Kernevez, D. Thomas
Numerical Analysis and Control of Some Biochemi-Systems
in: Applied Mathematics and Optimization, Vol 1, Nr. 1
Berlin Heidelberg New York 1975

[84] J.L. Lions, E. Magenes
Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol. I
Berlin Heidelberg New York 1972

LEBENSLAUF

Am 20.5.1954 wurde ich als Tochter des Diplom-Physikers Tjark Ebel und seiner Ehefrau Ilse (geb. Radden) in Hamburg geboren. 1961 wurde ich eingeschult. Ab 1965 besuchte ich das Gymnasium, zunächst die Charlotte-Paulsen-Schule in Hamburg-Wandsbek und ab 1967 das Gymnasium Willhöden in Hamburg-Blankenese, wo ich 1973 die Reifeprüfung ablegte. 1973 begann ich mit dem Studium der Physik an der Universität Hamburg, ein Semester später mit dem Studium der Mathematik. Ich wurde dabei von der Studienstiftung des deutschen Volkes gefördert. Nach dem Vordiplom in Mathematik und Physik setzte ich 1975 das Studium der Mathematik an der Universität Tübingen fort. 1978 bestand ich dort die Diplomprüfung mit einer Diplomarbeit über das Thema "Existenz- und Stabilitätsprobleme bei ausgearteten parabolischen Systemen", die von Prof. Hadeler betreut wurde. Anschließend hielt ich mich mit einem Stipendium der Volkswagen-Stiftung ein halbes Jahr am Weizmann Institute of Science in Rehovot (Israel) auf. Seit April 1981 bin ich als Wissenschaftliche Angestellte am Lehrstuhl Biomathematik in der Fakultät für Biologie der Universität Tübingen tätig. Die vorliegende Arbeit wurde unter der Anleitung von Prof.Dr. K.-P. Hadeler angefertigt. Meine akademischen Lehrer waren J.Appel, W.Beekmann, H. Brückmann, R.Carlsson, L.Collatz, M.Dal Cin, W.Grölz, K.-P. Hadeler, H.Heyer, K.Hinderer, E.Kähler, H.Kaul, W.Knapp, O.Krafft, K.Legrady, H.Mitter, R.Nagel, E. Pfaffelhuber, H.H.Schaefer, R.Schief, W.Seier, E.Sonnemann, P.Stähelin, H.Stumpf und M.Teucher.